Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 1 - MOD2 : "Norme, prodotti scalari, distanze" (28 febbraio - 4 marzo 2022)

1.1) Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Dimostrate che $\forall x, y \in V$ vale

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

1.2) Sia $I = [0,1]$ e sia $d_\infty(f,g) = \max_{x\in I} |f(x) - g(x)|$ per ogni $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$. Calcolate $d_\infty(f,g)$ per le coppie

a) $f(x) = 4x^3 + 1\,;\quad g(x) = 9x^2 - 6x\,;$

b) $f(x) = xe^{-x}\,;\quad g(x) = e^x\,.$

1.3) Sia $I = [0,1]$. Per ogni $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ sia $d_\infty(f,g)$ come nell'esercizio 1.2) e $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia $f_k(x) = \max\{0, 1 - kx\}$ per $x \in [0,1]$. Calcolate $d_\infty(f_k, 0)$ e $d_1(f_k, 0)$ e determinate poi $\lim_{k\to+\infty} d_\infty(f_k, 0)$ e $\lim_{k\to+\infty} d_1(f_k, 0)$.

1.4) Sia $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_4}$ la base ortonormale canonica di $\mathbf{R}^4$. Siano $\mathbf{x} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{2e_4}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{3e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}$. Determinate

$\|\mathbf{x}\|_2\,;\qquad \|\mathbf{y}\|_2\,;\qquad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2\,;\qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2\,;\qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\,;\qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\,,$

dove $\|\cdot\|_2$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indicano la norma euclidea e il prodotto scalare euclideo di $\mathbf{R}^4$, rispettivamente.

1.5) Provate che la funzione $\|\cdot\| : \mathbf{R}^3 \to [0, +\infty[$ definita da

$$\|\mathbf{v}\| = |z| + \max\{|x|, |y|\} \text{ per ogni } \mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

è una norma in $\mathbf{R}^3$ e disegnate la palla unitaria chiusa.

1.6) Dite se le seguenti sono delle norme su $\mathcal{C}^2([0,1])$:

a) $\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| + |f(0)|\,;$ b) $\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| + |f'(0)| + |3f(0)|\,;$

c) $\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| + |f(0)|\,;$ d) $\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| + |f(0)| + |f(1)|\,.$

1.7) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione strettamente crescente tale che $\varphi(0) = 0$ e soddisfa $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ per ogni $a, b > 0$ (i.e. φ è subadditiva). Provate che la funzione $\varphi \circ d$ è una distanza su X.

1.8) Dite se le seguenti sono delle distanze in $\mathbf{R}$:

i) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}\,;$ ii) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}\,;$ iii) $d(x,y) = |x-y|^2\,;$ iv) $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$

per $x, y \in \mathbf{R}$.

1.9) Dite se le seguenti sono delle distanze in $\mathbf{R}^2$:

i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |\arctan x_2 - \arctan y_2|\,;$ ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 e^{x_2} - y_1 e^{y_2}|$

per $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

1.10) Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, e sia $X = X_1 \times X_2$ il prodotto cartesiano di X_1 e X_2. Dimostrate che la funzione da $X \times X$ definita da $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ per $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, è una distanza su X.

1.11) Sia (X,d) uno spazio metrico. Provate che comunque presi $x,y,z\in X$ vale

$$|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y)$$

cioè d soddisfa una disuguaglianza di lipschitzianità.

1.12) Sia $V=\mathcal{C}^0([a,b])$ e $\|f\|_p=(\int_a^b|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ per $p\in\mathbf{R}$, $1\le p<+\infty$. Usando la disuguaglianza di Hölder integrale

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\le(\int_a^b|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b|g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}\qquad 1<p,q<+\infty \text{ con } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

provate che $\|\cdot\|_p$ è una norma (verifica la disuguaglianza di Minkowski!).

1.13) Provate che $V=\mathcal{C}^0([0,\frac{\pi}{2}])$ dotato della norma $\|f\|_\infty=\max\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|f(x)|$ non è euclideo, cioè non soddisfa l'identità del parallelogramma.

1.14) (difficile) Sia $(V,\|\cdot\|)$ uno spazio normato, la cui norma soddisfa l'identità del parallelogramma, ossia

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\qquad\text{per ogni } x,y\in V\,.$$

Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbf{R}$ la funzione definita da

$$\langle x,y\rangle=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\qquad\text{per ogni } x,y\in V\,.$$

Provate che è un prodotto scalare e che per ogni $x\in V$ soddisfa $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.