

Esercizi paradigma 1: “Linguaggio, insiemi e funzioni” (13 - 17 settembre 2021)

1.1) Stabilite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false:

- a) $\exists x \in \mathbb{N} : (x-1)^2 = x^2 + 1$; b) $\forall x \in \mathbb{N}, (x-1)^2 = x^2 + 1$; c) $\forall x \in \mathbb{N}, (x-1)^2 \leq x^2 + 1$;
d) $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x = 5^x$; e) $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x = 5^x$; f) $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x \leq 5^x$;
g) $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x \leq 5^x$; h) $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x \geq 5^x$; i) $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x \geq 5^x$.

1.2) Sia $\mathcal{Q}(x, y)$ il predicato “ $x \leq y^2$ ”. Stabilite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false:

- a) $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$; b) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$; c) $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$;
d) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$; e) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$; f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$.

1.3) Dite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta, provando, per esempio, che la negazione è una proposizione vera o falsa):

- a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x - y \leq 0$; b) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : 4x + 2y = 0$;
c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : 2x - 4y = 0$; d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, [(x \neq y) \implies (x^2 \neq y^2)]$;
e) $\exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{R}, (2x + 1)y = 0$; f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : (y + 1)x \geq 0$.

1.4) Siano dati gli insiemi $A = [-2, 5]$, $B =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ e $C = \{-1, 2\}$.

- a) Rappresentate graficamente gli insiemi A , B e C sulla retta reale.
b) Individuate quali delle seguenti scritture sono corrette; per ciascuna delle scritture corrette dite se esprime un'affermazione vera o falsa:

$$-1 \in B; \quad \{-1\} \subseteq C; \quad A \cap C = C; \quad 4 \subset A; \quad]2, 5[\subset A; \quad C \subseteq \mathbb{R} \setminus B; \quad C \setminus A \neq \emptyset.$$

1.5) a) Rappresentate graficamente sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 \geq 3x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 9)(x^2 + 2) = 0\}.$$

- b) Determinate $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ e $\mathbb{R} \setminus B$. Gli insiemi A e B sono disgiunti?
c) Dite se gli insiemi A e B sono degli intervalli.
d) Dite se sono vere o false le seguenti affermazioni (motivando le risposte):

$$[-1, 0] \in \mathcal{P}(A); \quad \{-2, 2\} \subseteq B; \quad C = [-3, 3]; \quad A \cap C = \{-3\}; \quad B \subseteq \mathcal{P}(B); \quad C \in \mathcal{P}(B).$$

e) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi $\{-1\} \times C$; $C \times A$ e $B \times A$.

1.6) a) Rappresentate graficamente sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| + |x^2 - 1| \geq 2x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[4]{1 - |x|} < 1\}.$$

- b) Dite se sono intervalli. Dite se A e B sono insiemi disgiunti.
c) Determinate gli insiemi $B \cup C$, $B \cap C$ e $B \setminus C$.

1.7) Rappresentate nel piano cartesiano le funzioni

- a) $f(x) = x^2 + 1$; $f(x) = (x-1)^2$; $f(x) = -x^2$; $f(x) = (x+1)^2 - 1$; $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
b) $f(x) = x^3 - 1$; $f(x) = -x^3$; $f(x) = -(x+1)^3 + 1$.
c) $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$, per $x \geq -1$; $f(x) = -\sqrt{x} - 1$ per $x \geq 0$.
d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$; $f(x) = -\sqrt[3]{x+1} - 1$.
e) $f(x) = 2^x - 1$; $f(x) = -2^{x-1}$; $f(x) = e^{|x|} + 1$.
f) $f(x) = 1 - \log x$, per $x > 0$; $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$, per $x > 0$; $f(x) = \log_2(x+1)$, per $x > -1$.

1.8) Per ciascuna delle seguenti espressioni determinate l'insieme dei numeri reali per cui è definita:

a) $\sqrt{|x-1|+2x}$; b) $\sqrt[3]{\log(x-\sqrt{x})}$; c) $\sqrt[4]{1-\log x}$; d) $\log \left| e^x - \frac{1}{e} \right|$.

1.9) Siano date le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 0 \\ 3x+1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x-1 & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

- i) Determinate l'immagine di f e l'immagine di g .
- ii) Dite se sono funzioni iniettive, e se sono funzioni suriettive.
- iii) Determinate, dove esiste, la funzione composta $f \circ g$.

1.10) Date le funzioni $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

determinate l'espressione delle funzioni composte $g \circ f$ ed $f \circ g$.

1.11) Per ciascuna delle seguenti funzioni determinate, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = \lambda$:

$$f(x) = (x-1)^2 + 3; \quad f(x) = -|x+1|; \quad f(x) = |x^2 + 2x|; \quad f(x) = e^{x+2} - 1; \quad f(x) = -e^{-x^2}.$$

- 1.12) a) Trovate due funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con g non iniettiva e $g \circ f$ iniettiva.
- b) Esistono due funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con f non iniettiva e $g \circ f$ iniettiva?
- c) Trovate due funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con f non suriettiva e $g \circ f$ suriettiva.
- d) Esistono due funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con g non suriettiva e $g \circ f$ suriettiva?