

Esercizi paradigma 3: “Numeri complessi a gogò”
(27 settembre - 1 ottobre 2021)

3.1) a) Determinate modulo, coniugato, reciproco dei seguenti numeri complessi:

$$1 - 2i; \quad -3 + i; \quad \sqrt{3} + i; \quad -2 - \frac{1}{2}i; \quad 8i; \quad \frac{1}{1-i} - \frac{2i}{-i+1}.$$

b) Scrivete in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2; \quad \frac{(8-i) + (6+i)}{2+2i}; \quad \frac{3i}{|2-i|^2}; \quad \frac{4+2i}{i}.$$

c) Scrivete in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$$-i; \quad 2 - 2i; \quad 3 + \sqrt{3}i; \quad -\sqrt{3} + 3i; \quad 2i; \quad -4.$$

3.2) a) Sia $z = 2i$. Determinate $\operatorname{Re}((z+1)(\bar{z}+3))$ e $\operatorname{Im}(|z|i + \overline{(z+1)})$.

b) Risolvete in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

$$\text{i) } 2z - 3\bar{z} = 3i + 1; \quad \text{ii) } z^2 = 2\bar{z}; \quad \text{iii) } z^2 = 2\bar{z}i.$$

c) Risolvete in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni di secondo grado:

$$\text{i) } 4z^2 - 4z + 2 - \sqrt{3}i = 0; \quad \text{ii) } z^2 + 2iz - 1 - i = 0.$$

3.3) Rappresentate nel piano di Gauss i seguenti insiemi:

$$\text{i) } A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Im} z \geq 1\}; \quad \text{ii) } B = \{z \in \mathbb{C} : 2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z + 1 \geq 0, (\operatorname{Im} z)^2 \leq 1\};$$

$$\text{iii) } C = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \operatorname{Im} z\}; \quad \text{iv) } D = \{z \in \mathbb{C} : |z+1|^2 = (\operatorname{Im} z)^2\};$$

$$\text{v) } E = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq 2, |z| = |z-1|\}; \quad \text{vi) } F = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 1\}.$$

3.4) a) Scrivete in forma algebrica la quarta e la decima potenza di $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

b) Determinate e rappresentate nel piano di Gauss

$$\text{i) le radici cubiche di } w = 2(i-1); \quad \text{ii) le radici quarte di } z, \text{ quando } \bar{z} = 1+i.$$

3.5) Trovate le soluzioni complesse (z, w) dei seguenti sistemi di equazioni

$$\text{i) } \begin{cases} w^2 + i\bar{w} + z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(-1+i) \\ |z|^2 - z^2 = 0; \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} z + iw\bar{z} = -i \\ w - iz\bar{w} = i; \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} \bar{z}w = i \\ |w|^2 z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.6) Rappresentate nel piano di Gauss i numeri complessi della forma z^k

$$\text{i) con } z = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ e } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$\text{ii) con } z = \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ e } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

3.7) Dimostrate che comunque presi $z, w \in \mathbb{C}$ si ha

$$\text{i) } |z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2;$$

$$\text{ii) } |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

3.8) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 - 2z + 4 = 0$ e indicate con z_1 la soluzione dell'equazione che si trova nel primo quadrante del piano complesso. Scrivete in forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale

i) il numero complesso z_1 ;

ii) il simmetrico di z_1 rispetto all'asse reale;

iii) il simmetrico di z_1 rispetto all'asse immaginario;

iv) il simmetrico di z_1 rispetto all'origine;

v) il simmetrico di z_1 rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante;

vi) il simmetrico di z_1 rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

- 3.9) Trovate le soluzioni complesse di modulo 1 dell'equazione $|1 - z| = 1$ e interpretatele geometricamente nel piano di Gauss.
- 3.10) Sia $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Nel piano di Gauss rappresentate graficamente l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : z^3 \in E\}$.
- 3.11) Sia $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Determinate le immagini degli insiemi
 $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$
tramite le funzioni $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definite da $f(z) = z^2$, $g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$ e $h(z) = \frac{1}{z}$.