

Esercizi paradigma 6: “Quando le funzioni iniziano ad essere più regolari... le funzioni continue....”
 (18 - 22 ottobre 2021)

6.1) Determinate per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue su \mathbb{R} :

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \alpha & \text{se } x < -1 \\ -x2^{-x} & \text{se } x \geq -1; \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^{2x} - 1}{\sin 4x \cos x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \cos x - 2\beta & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x + \beta & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

6.2) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$. Estendete la definizione di f (cioè definite f nel punto $x = -1$) in modo che la funzione estesa risulti continua in \mathbb{R} .

6.3) Quali delle seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione reale? Quali hanno un'unica soluzione reale?

$$e^{-x} - \arctan x = -1; \quad 1 - x^4 = 4x^2; \quad 2x^4 + |x| = 1; \quad x^{33} + x + 1 = 0.$$

6.4) Provate che l'equazione $\sqrt{x} = 3 - x^2$ ammette una ed una sola soluzione x_0 nell'intervallo $[1, 2]$.
 Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset]1, 2[$ con $x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

6.5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$(*) \quad \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 \quad \forall x \in [-2, 2].$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente (*)?

i) $\exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = 3$; ii) $\exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = \frac{3}{2}$;

iii) $\exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = 1$; iv) $\exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = \frac{1}{2}$.

6.6) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$.

6.7) Per ciascuna delle seguenti funzioni dite se soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo indicato:

i) $f(x) = \log x$ su $]0, +\infty[$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x^2 \sin \frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

6.8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia X un sottoinsieme limitato e non vuoto di \mathbb{R} . Provate che allora l'insieme immagine di X tramite f , ossia $f(X)$, è anch'esso un insieme limitato.

6.9) Sia $g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in X$ tale che $g(x_0) = x_0$ si dice *punto fisso di g* in X .

- Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua.
- Provate che esiste un punto fisso di f in $[0, 1]$.
- Fate un disegno e interpretate graficamente l'enunciato.
- Sia $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ una funzione continua. Esiste necessariamente un punto fisso di f in $]0, 1[$?

6.10) Provate che non esistono funzioni continue e biiettive e da $[0, 1[$ in $[0, 1]$.

6.11) Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. È possibile che la diseguaglianza $f(x) \neq g(x)$ sia verificata solo in un punto dell'intervallo $]a, b[$?

6.12) (Teorema di Weierstrass generalizzato) Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty.$$

Allora f ammette minimo su \mathbb{R} , cioè esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}} f$.

6.13) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dite quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):

- $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0 \implies f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies xf(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) + g(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

6.14) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, motivando la risposta:

- $\arcsin x^2 \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$;
- $\arcsin x = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0^+$;
- $\arctan \sqrt{|x|} = o(1)$ per $x \rightarrow 0$;
- $\arctan x = O(1)$ per $x \rightarrow -\infty$;
- $\frac{1}{x^2} + 2 = O(1)$ per $x \rightarrow +\infty$;
- $\sqrt{x^2 - x} \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$;
- $1 - \cos(x - 1) \sim \frac{(x-1)^2}{2}$ per $x \rightarrow 1$.

6.15) i) Provate che la funzione $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su \mathbb{R} e che la sua immagine è \mathbb{R} . Determinate la sua funzione inversa, $\text{settsinh}x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

ii) Provate che la funzione $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e che la sua immagine è $[1, +\infty[$. Determinate la sua funzione inversa, $\text{settcosh}x : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.

iii) Valgono per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ le seguenti relazioni:

- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$,
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x$.