

Esercizi paradigma 6: “Quando le funzioni iniziano ad essere più regolari... le funzioni continue.....”

(18 - 22 ottobre 2021)

6.1) Determinate per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue su \mathbb{R} :

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \alpha & \text{se } x < -1 \\ -x2^{-x} & \text{se } x \geq -1; \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{\sin 4x \cos x} & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad \text{iii) } f(x) = \begin{cases} \cos x - 2\beta & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x + \beta & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

6.2) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$. Estendete la definizione di f (cioè definite f nel punto $x = -1$) in modo che la funzione estesa risulti continua in \mathbb{R} .

6.3) Quali delle seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione reale? Quali hanno un'unica soluzione reale?

$$e^{-x} - \arctan x = -1; \quad 1 - x^4 = 4x^2; \quad 2x^4 + |x| = 1; \quad x^{33} + x + 1 = 0.$$

6.4) Provate che l'equazione $\sqrt{x} = 3 - x^2$ ammette una ed una sola soluzione x_0 nell'intervallo $[1, 2]$.
Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset]1, 2[$ con $x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

6.5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$(*) \quad \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 \quad \forall x \in [-2, 2].$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente $(*)$?

$$\begin{aligned} \text{i) } \exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = 3; & \quad \text{ii) } \exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = \frac{3}{2}; \\ \text{iii) } \exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = 1; & \quad \text{iv) } \exists x_0 \in [-2, 2] : f(x_0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.6) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$.

6.7) Per ciascuna delle seguenti funzioni dite se soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo indicato:

$$\text{i) } f(x) = \log x \quad \text{su }]0, +\infty[;$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x^2 \sin \frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- 6.8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia X un sottoinsieme limitato e non vuoto di \mathbb{R} . Provate che allora l'insieme immagine di X tramite f , ossia $f(X)$, è anch'esso un insieme limitato.
- 6.9) Sia $g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in X$ tale che $g(x_0) = x_0$ si dice *punto fisso* di g in X .
- a) Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua.
- i) Provate che esiste un punto fisso di f in $[0, 1]$.
- ii) Fate un disegno e interpretate graficamente l'enunciato.
- b) Sia $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ una funzione continua. Esiste necessariamente un punto fisso di f in $]0, 1[$?
- 6.10) Provate che non esistono funzioni continue e biettive e da $]0, 1[$ in $[0, 1]$.
- 6.11) Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. È possibile che la disuguaglianza $f(x) \neq g(x)$ sia verificata solo in un punto dell'intervallo $]a, b[$?
- 6.12) (Teorema di Weierstrass generalizzato) Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tale che
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty.$$
- Allora f ammette minimo su \mathbb{R} , cioè esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}} f$.
- 6.13) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dite quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):
- i) $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0 \implies f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- ii) $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$;
- iii) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$;
- iv) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- v) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies xf(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- vi) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$;
- vii) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x) + g(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$;
- viii) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \implies f(x^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.
- 6.14) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, motivando la risposta:
- i) $\arcsin x^2 \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$; ii) $\arcsin x = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0^+$;
- iii) $\arctan \sqrt{|x|} = o(1)$ per $x \rightarrow 0$; iv) $\arctan x = O(1)$ per $x \rightarrow -\infty$;
- v) $\frac{1}{x^2} + 2 = O(1)$ per $x \rightarrow +\infty$; vi) $\sqrt{x^2 - x} \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$;
- vii) $1 - \cos(x - 1) \sim \frac{(x-1)^2}{2}$ per $x \rightarrow 1$.
- 6.15) i) Provate che la funzione $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su \mathbb{R} e che la sua immagine è \mathbb{R} . Determinate la sua funzione inversa, $\text{settsinh} x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- ii) Provate che la funzione $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e che la sua immagine è $[1, +\infty[$. Determinate la sua funzione inversa, $\text{settcosh} x : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.
- iii) Valgono per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ le seguenti relazioni:
- a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
- b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.