Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 8 - MOD2 : "Derivate di ordine superiore e non solo, funzioni positivamente omogenee e il teorema di Eulero, funzioni armoniche..."

(18 - 22 aprile 2022)

8.1) Determinate la derivata rispetto a $t \in \mathbf{R}$ (se non specificato altrimenti) delle funzioni composte $(g \circ \underline{f})(t)$ seguenti:

i) $g(x,y) = x^2 - y^2, \qquad \underline{f}(t) = (2+t, 1-3t)\,;$

ii) $g(x,y) = (x^2+y^2)^2, \qquad \underline{f}(t) = (\cos t, \sin t)\,;$

iii) $g(x,y) = \log(x^2 - y^2), \qquad \underline{f}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad$ con $0 < t < \frac{\pi}{4}$;

iv) $g(x,y,z) = z^2 x + xy^2, \qquad \underline{f}(t) = (e^t, e^{-t}, 0)\,.$

8.2) Un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice un *cono* (oppure un insieme *conico*) se per ogni $\mathbf{x} \in A$ e per ogni $t > 0$ si ha $t\mathbf{x} \in A$ (cioè A è un cono se contenendo un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ contiene tutta la semiretta uscente dall'origine $\mathbf{0}$ (non compreso) passante per $\mathbf{x}$).

Dite quali dei seguenti insiemi sono coni e quali no:

i) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}\,;$ ii) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq |y| \leq 2|x|\}\,;$

iii) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy > 0\}\,;$ iv) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : |z| \geq \sqrt{4x^2 + 9y^2}\}\,.$

8.3) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono e sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ si dice *positivamente omogenea di grado* α se

(*) $$f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in A, \qquad \forall t > 0\,.$$

Stabilite se le seguenti funzioni sono funzioni positivamente omogenee determinandone il grado di omogeneità.

i) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ su $A = \mathbf{R}^2\,;$ ii) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ su $A = \mathbf{R}^n\,;$

iii) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ su $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\,;$ iv) $f(x,y) = x^2 + y$ su $A = \mathbf{R}^2\,;$

v) $f(x,y,z) = \dfrac{x - y + 3z}{yz - z^2}$ su $A = \mathbf{R}^3 \setminus \{z = 0\} \cup \{z = y\}\,.$

8.4) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione positivamente omogenea di grado α.

i) Provate che se $\mathbf{0} \in A$ e $\alpha \neq 0$, allora $f(\mathbf{0}) = 0$.

ii) Per ogni $\mathbf{x} \in A \cap \partial B_1(\mathbf{0})$ sia $f(\mathbf{x}) = 4$. Siano $\mathbf{x_1} = (1,1,\dots,1,1)$ e $\mathbf{x_2} = (-2,2,-2,\dots,(-1)^n 2)$ in $\mathbf{R}^n$. Se $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ appartengono ad A, calcolate $f(\mathbf{x_1})$ e $f(\mathbf{x_2})$; più in generale, scrivete l'espressione di $f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$ (se A contiene l'origine).

8.5) (**Teorema di Eulero**) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono aperto, e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A. Allora f è positivamente omogenea di grado α se e solo se vale

(**) $$\langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \alpha f(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in A, \qquad (\textit{identità di Eulero}).$$

(Suggerimento dim.: ($\Longrightarrow$) usate (*) in 8.3) e il teorema di derivazione di funzioni composte.

($\Longleftarrow$) Fissato $\mathbf{x} \in A$, provate che la funzione $g(t) = \dfrac{f(t\mathbf{x})}{t^\alpha}$ definita per $t \in]0, +\infty[$ è costante (usando di nuovo il teorema di derivazione di funzioni composte).

8.6) (**Omogeneità del gradiente di una funzione omogenea**) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono aperto, e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in A. Provate che se f è positivamente omogenea di grado α allora per ogni $i \in \{1,2,\dots,n\}$ la derivata parziale f_{x_i} è una funzione omogenea di grado $\alpha - 1$ su A.

8.7) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ la funzione $f(x,y) = x^3 y \cos \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ e sia $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbf{R}\} \to \mathbf{R}$ la funzione $g(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. Le funzioni f e g sono positivamente omogenee? In caso affermativo, verificate la validità dell'identità di Eulero (**).

8.8) Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale e simmetrica $n \times n$ e $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (*forma quadratica* associata alla matrice $\mathbf{A}$). Verificate che f verifica l'identità di Eulero (**) con $\alpha = 2$ (vedi 11Lez. 05/04 pag.133).

8.9) (*Peano 1884*) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Osservate che per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ le derivate seconde miste esistono $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ e sono uguali.

ii) Dimostrate che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e che le derivate prime sono continue.

iii) Determinate le derivate parziali seconde miste di f in $(0,0)$ e verificate che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

8.10) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un insieme aperto e $u \in \mathcal{C}^2(A)$. La funzione u si dice *armonica* se

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } A\,,$$

dove $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$.

Verificate che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme di definizione $A \subseteq \mathbf{R}^2$:

i) $y^3 - 3x^2 y\,;$ ii) $\arctan \dfrac{y}{x}\,;$ iii) $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,.$

8.11) Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$. Sia $c > 0$ e sia $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(x,t) = f(x+ct) \qquad \text{(oppure da} \qquad \varphi(x,t) = f(x-ct)).$$

Verificate che la funzione φ soddisfa l'equazione alle derivate parziali (*equazione delle onde*)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^2.$$

8.12) Verificate che la funzione $f :]0,+\infty[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali (*equazione del calore*)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{in }]0,+\infty[\times \mathbf{R}.$$