

**Esercizi paradigma 8: “..Studio qualitativo di funzioni (... non hanno più segreti per voi),
de l'Hôpital e sviluppi di Taylor ...”**
(2 - 5 novembre 2021)

8.1) Studiate le seguenti funzioni e tracciate un grafico qualitativo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad f(x) &= \begin{cases} x\sqrt{|x-4|-2} & \text{se } x < 0 \\ \arctan(-x^2) & \text{se } x \geq 0; \end{cases} & \text{ii)} \quad f(x) &= \frac{e^{|x|}}{e^x - e}; \\ \text{iii)} \quad f(x) &= \sqrt{|x|} \log x^2; & \text{iv)} \quad f(x) &= \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{x}; & \text{v)} \quad f(x) &= \arctan \frac{1}{x} + |x+1|. \end{aligned}$$

8.2) Studiate le seguenti funzioni e tracciate di ciascuna un grafico qualitativo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad f(x) &= |x| - \sqrt{|x|}; & \text{ii)} \quad f(x) &= \sqrt{x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right|}; & \text{iii)} \quad f(x) &= \frac{\log x}{1 + \log x}; \\ \text{iv)} \quad f(x) &= \frac{x-4+|x+4|}{2} e^x; & \text{v)} \quad f(x) &= \log \left(\frac{x^2 - 2|x| + 1}{x+1} \right). \end{aligned}$$

8.3) Una funzione $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in $]a, b[$ se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in]a, b[$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

- i) Provate che se f è derivabile in $]a, b[$ e $|f'(x)| \leq L$ allora f è lipschitziana in $]a, b[$.
- ii) Provate che $f(x) = \sin x$ è lipschitziana in $\mathbb{R}$.

8.4) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usando, se possibile, il teorema di de l'Hôpital, e non solo ...):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3}; & \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\log x}; & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log(\sin x)}; & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x) \log x; & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\tan(\pi x)}; & \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}); \\ \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - \cos x}{2x}; & \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

8.5) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usando, se possibile, gli sviluppi di Taylor):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1 + \sin x)}{x \tan x}; & \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1 + x)}{1 - \cos x}; & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right); & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^5}{(\sin x - x \cos(x/\sqrt{3}))^2}; \\ \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right); & \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sin x^2 - \sin^2 x)}{\sin x^2 - \tan x^2}; \\ \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}; & \text{j)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1-x)^{-1} + e^x]^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x^3}; \\ \text{k)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x + 3(x - \sin^2 \sqrt{x})}{x^2}; & \text{l)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{1 + x^2 - e^{x^2} + \sin^3 x}; \\ \text{m)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^3 - \log^2(1 - x)}{1 - \cos^2 x}; & \text{n)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \log(1 + x \arctan x)}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}. \end{aligned}$$