Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2020-2021

Esercizi Paradigma 9 - MOD2 : "Formula di Taylor ed estremi liberi (i primi passi)..."

(25 - 29 aprile 2022)

9.1) i) Sia $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia $r : A \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ($=\sqrt{x^2+y^2}$ per ogni $\mathbf{x} = (x,y) \in A$). Determinate per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$\Delta r(\mathbf{x})\,; \qquad \Delta(r^2)(\mathbf{x})\,; \qquad \Delta(\frac{1}{r})(\mathbf{x}).$$

ii) Sia $n > 2$. Sia $A = \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia $r : A \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ($=\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$). Determinate per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$\Delta r(\mathbf{x})\,; \qquad \Delta(r^2)(\mathbf{x})\,; \qquad \Delta(\frac{1}{r})(\mathbf{x}).$$

Oss. Per $n = 3$, confrontate $\Delta(\frac{1}{r})(\mathbf{x})$ con quanto ottenuto nell'es. a pag. 175 (15Lez(2)19/04).

9.2) Provate che per $(x,y) \to (0,0)$ valgono

i) $(x+y)^3 + xy^2 + o(xy) = o(\|\mathbf{x}\|^2)$;

ii) $yx^4 + xo(y^3) = o(\|\mathbf{x}\|^4)$.

9.3) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $\mathbf{x_0}$ delle funzioni

i) $f(x,y) = x\cos(x+y)$ con $\mathbf{x_0} = (0,0)\,;$

ii) $g(x,y) = \log(2x^2 + y)$ con $\mathbf{x_0} = (1,0)\,.$

9.4) Scrivete (motivando) il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $\mathbf{x_0} = (0,0)$ delle funzioni

i) $x^2 - 2y + x^4 - y^4\,;$ ii) $x^2 - 2y + \sin^2(x^2+y^2)\,;$ iii) $x^2 - 2y + \arctan x^4\,.$

9.5) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $\mathbf{x_0} = (0,0,0)$ delle funzioni

i) $f(x,y,z) = 2x - yz + z^3 + 3x^4 - y^2z^2\,;$ ii) $g(x,y,z) = e^x e^y e^z\,.$

9.6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ delle funzioni

i) $f(x,y) = \log(1 + x\sin y)\,;$ ii) $g(x,y) = (1-\cos x)\sin y\,;$

iii) $f(x,y,z) = \sin(2x + y - z)\,;$ iv) $g(x,y,z) = (x+y)\sin z + (x+z)\sin y + (y+z)\sin x\,.$

9.7) Calcolate $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-1+e^y) - x - y}{x^2 + |y|}\,.$

9.8) Delle seguenti funzioni determinate il differenziale primo e il differenziale secondo nel punto $\mathbf{x_0}$ a fianco indicato:

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$ $\mathbf{x_0} = (1,0)\,;$ ii) $f(x,y,z) = e^{2x+y} + \cos(3x+z)$ $\mathbf{x_0} = (0,0,0)\,.$

9.9) a) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = xy - 2x + y - 2$. Rappresentate graficamente alcune curve di livello di f, determinate i punti critici di f e studiate la loro natura.

b) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = xy(x-1)$. Studiate il segno di f. Determinate se esiste $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$ e dite se esistono massimo e minimo globale per f. Determinate i punti critici della f e studiate la loro natura.

c) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$. Determinate il suo segno. Determinate i punti critici della f e studiate la loro natura.

9.10) Classificate le seguenti forme quadratiche $Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ($Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$) definite da

i) $Q(h_1, h_2) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2$;

ii) $Q(h_1, h_2) = 2h_1^2 - 3h_1h_2 + h_2^2$;

iii) $Q(h_1, h_2) = -h_1^2 + h_1h_2 - h_2^2$;

iv) $Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_1h_3 + 3h_1h_2 - 6h_2h_3$;

v) $Q(h_1, h_2, h_3) = -h_1^2 - 2h_2^2 + 2h_1h_2 - \frac{1}{2}h_3^2$.