Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2021–2022

Esercizi paradigma 9: "..la magia degli sviluppi di Taylor ... e l'incontro con le serie"
(8 - 12 novembre 2021)

9.1) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 4, centrato in $x_0 = 0$, delle funzioni

i) $f(x) = (e^{-x} - 1)\sin 2x$; ii) $f(x) = \log(1 - \frac{x^2}{2})$; iii) $f(x) = (e^{2x} - 1)^3$.

9.2) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = (x - x^2)(\cos 2x - 1) + 2x \log(1 + x^2)$; ii) $f(x) = \log(\cos x) + \frac{1}{2}\sin^2 x$.

9.3) Calcolate i seguenti limiti usando gli sviluppi di Taylor:

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x^2}}}{\arctan\frac{1}{x^2}}$; ii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$; iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\log(1 + \frac{1}{x^3})}$; iv) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sin^2(x-1)}{\sqrt{x}\log^2 x}$.

9.4) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(e^{-x} - 1)\sin 2x + \log(1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{5}{2}x^2}{\cos x^\alpha - 1}$; ii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{3xe^x - \sin(\log(1+x)) - 2x - \frac{7}{2}x^\alpha}{\sin x^3}$.

9.5) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x) = e^{-x^2}$ centrato in $x_0 = 1$.

9.6) a) Rappresentate graficamente $f(x) = \sqrt{1+x} - \sin\frac{x}{2} - 1$ in un intorno di $x_0 = 0$.
b) Sia $f(x) = -x^2 + 3x^3 - o(x^3)$ per $x \to 0$. Determinate $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e $f'''(0)$.

9.7) a) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{2|\alpha| - 4}{|\alpha| + 2})^n$ risulti convergente. Per tali α determinate la somma.

b) Discutete la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$. Determinate la somma.

9.8) Discutete il carattere delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n}\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}$.

9.9) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che le seguenti serie risultino convergenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \arctan n^\alpha)$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \sin\frac{1}{n})n^\alpha$.

9.10) Discutete la convergenza delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{a}{4})^n$, al variare di $a > 0$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\frac{a}{4})^n$, al variare di $a > 0$;

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}}{3^n}$; v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}(\frac{n+2}{n})^{n^2}$; vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n^2 + |\cos n|}$.

9.11) Determinate il carattere delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + 2^n}{n!}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n|\alpha| - n}}{n \log^2 n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.12) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere di a_n e di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per

i) $a_n = \dfrac{2^{n\alpha}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$; ii) $a_n = \dfrac{(n+2)^\alpha}{n^2+2n}$.

9.13) a) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha^2-1})^n}{n^3 e^n}$.

b) Determinate, al variare di $\alpha > -2$, il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\log(2+\alpha)|^n$.

9.14) Discutete la convergenza delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n(1+\log^{\frac{5}{4}} n)}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha^2+\frac{1}{2}}(\log n)^{\alpha+\frac{3}{4}}}$.