COGNOME E NOME: ____________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	3	3	3	4	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	4	3	2	3	2		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $\mathbf{r} :]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ una curva di classe $\mathcal{C}^1$.

   Allora per ogni $t \in]-1,1[$ si ha $(f \circ \mathbf{r})'(t) =$ ____________________.

   Consideriamo ora
   $$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1, \arccos t, \sin t + 2),$$
   allora
   (a) si ha $(f \circ \mathbf{r})'(0) =$ ____________.
   (b) l'equazione parametrica della retta tangente alla curva nel punto $\mathbf{r}(0)$ è
   $$\begin{cases} x = a + bs \\ y = c + ds \\ z = 2 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$
   dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______, $d =$ ______.

2. (3 punti) Sia $\mathcal{C}$ l'arco di curva di equazione polare
   $$\rho = e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$
   (a) Verificate che la curva è regolare per ogni θ.

   ____

   (b) Determinate $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tale che nel punto $(x(\theta), y(\theta)) \in \mathcal{C}$ la retta tangente a $\mathcal{C}$ è parallela alla retta di equazione $x - \sqrt{3}y = 0$.
   Si ha $\theta =$ ______.

   Perché? ____________________

3. (3 punti) Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'equazione

$$y^2 - 2xy + x^2 + 3x + 3y - 6 = 0$$

e sia $P = (1, 1)$ un punto su $\mathcal{C}$.

(a) L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è

$$ax + by - 2 = 0,$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______.

(b) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il punto P sia un punto stazionario per $f(x, y) = \alpha x^2 + y^4 + 2x$ su $\mathcal{C}$. Allora $\alpha =$ ______.

Perché? ____

4. (3 punti) Il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = 2xy^2 + x^2 \log(1 + y + x) - \sin(xy)$$

è

$$axy + bxy^2 + cx^2y + dx^3 - \frac{x^2y^2}{2} + ex^3y - \frac{x^4}{2},$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______, $d =$ ______, $e =$ ______.

Stabilite se sono vere o false le seguenti affermazioni:

(a) $x^2y^2 = o(\|(x, y)\|^4)$ per $(x, y) \to (0, 0)$

◯ Vera ◯ Falsa

(b) $x^2 o((x + y)^2) = o(\|(x, y)\|^4)$ per $(x, y) \to (0, 0)$

◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

5. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(y + x^2 + 1)$.

Sapendo che f ha solo due punti critici (non dovete provarlo!) e che questi sono della forma $P_1 = (0, \alpha)$ e $P_2 = (0, \beta)$ con $\alpha < \beta$, determinate α e β. Risulta allora $\alpha =$ ______ e $\beta =$ ______.

Determinate poi la loro natura: risulta che

(a) P_1 è un punto di ______________________ per f.

Perché? ____

(b) P_2 è un punto di ______________________ per f.

Perché? ____

6. (4 punti) Verificate che l'equazione

$$(*) \qquad y\log(x^2+1) - y^2 + e^{-2x} = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $x_0 = 0$ tale che $\varphi(0) = 1$. Determinate

(a) l'equazione della retta tangente al grafico di φ nel punto $(0, 1)$: ________________;

(b) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite $L = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x) - e^{-x}}{x^\alpha}$:

____

Rappresentate qui accanto approssimativamente la curva di equazione (*) nell'intorno del suo punto $(0, 1)$.

L'equazione definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $y_0 = 1$ tale che $\psi(1) = 0$? ◯ Si ◯ No

Perché? ____

7. (3 punti) (a) Determinate i punti della curva $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^3 + y^2 - x^2 = 0$$

in cui non è possibile applicare il teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili:

____

(b) Determinate i punti della curva $\mathcal{C}$ nei quali la retta tangente alla curva è orizzontale.

____

8. (4 punti) Si consideri la funzione $f(x, y) = y(x-1)^2 - y^2$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f ha un punto critico che è di estremo per f su $\mathbb{R}^2$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(b) Tutti i punti di minimo e massimo assoluto di f su R si trovano sul bordo di R. ◯ Vera ◯ Falsa

Il numero di punti di minimo assoluto di f su R è _____.

Il numero di punti di massimo assoluto di f su R è _____.

Inoltre, si ha $\min\limits_R f =$ _____ e $\max\limits_R f =$ _____.

9. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) f ammette piano tangente al grafico di f in $(0,0)$ di equazione $z = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

10. (2 punti) Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (\sinh(x_1 - x_2), x_1 + x_2).$$

Dopo aver verificato che $\mathbf{f}$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, determinate $J_{\mathbf{f}^{-1}}(0,1)$. Si ha

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(0,1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______, $d =$ ______.

11. (3 punti) Sia $f(x,y,z) = x - y$ e sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1\}$. Allora

$$\min_E f = \text{\_\_\_\_\_\_} \qquad \max_E f = \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

12. (2 punti) Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2 + y + z^2, x - z) \qquad \mathbf{g}(s,t) = (e^{s-t}, s).$$

Allora si ha $\dfrac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_1}{\partial z}(2,-4,1) =$ ______ e $\dfrac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_2}{\partial x}(2,-4,1) =$ ______.