

COGNOME E NOME: _____

MATRICOLA:

--	--	--	--	--	--

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	2	3	2	3	3	2
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		Totale
Punti	3	2	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $f : [-4, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \log(x^3 + 4x^2 - 3x + 2).$$

Allora

- (a) f ha un punto critico in $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (b) f ha un punto di massimo assoluto in $x = \underline{\hspace{2cm}}$ e un punto di minimo assoluto in $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (c) $f([-4, 0]) = [\log a, \log b]$ con $a = \underline{\hspace{2cm}}$ e $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (d) la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è strettamente crescente su $[-4, 0]$. Vera Falsa

2. (2 punti) Sia $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2 \cos x \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $0 \in I$. Allora il polinomio di Taylor di $y(x)$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ è dato da

$$P_{3,0}(x) = a + bx + c \frac{x^2}{2} + d \frac{x^3}{3!}$$

con $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$ e $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (3 punti) Sia

$$A = \int_e^{e^{e^2}} \frac{\log(\log x)}{x} dx.$$

Allora

$$A = ae^b + c, \text{ dove } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}} \text{ e } c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. (2 punti) Sia

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin 2x} (e^{t^2} - 1) dt}{\arctan \frac{x^3}{3}}.$$

Allora $L = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. (3 punti) Sia $g(x) = \frac{\arctan x}{x}$ per ogni $x \neq 0$ e sia f la sua estensione continua a tutto \mathbb{R} . Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a) F è decrescente su $]-\infty, 1]$ e crescente su $[1, +\infty[$. Vera Falsa
- (b) F ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Vera Falsa
- (c) F è derivabile 2 volte in $x_0 = 0$ e $F''(0) = 0$. Vera Falsa
- (d) F è $C^2(\mathbb{R})$. Vera Falsa
- (e) F è dispari. Vera Falsa

6. (3 punti) Per ogni integrale improppio dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora

- (a) per $\int_0^{+\infty} \frac{2 + e^{-x^\alpha}}{x^{\alpha-1}(x + 2\pi)} dx$ si ha $\inf E_\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (b) per $\int_0^1 \frac{\log(2-x)^\alpha}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\arctan(x^{\frac{\alpha}{2}})} dx$ si ha $\sup E_\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (c) per $\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{\log^{\frac{\alpha}{8}} x}\right) \right)^2 dx$ si ha $\inf E_\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. (2 punti) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Sì No
- (b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. Sì No
- (c) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a_n^2)$ è convergente. Sì No
- (d) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è convergente. Sì No

8. (3 punti) Siano

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(\sin x + 1))}{\log(\arctan 2x)}; \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)^{-1}}{\log(x + 2)}.$$

Allora $L_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ e $L_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (2 punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n^3 + \log n^3)}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}} \arcsin\left(\frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha}\right).$$

Stabilite per ciascuna delle tre seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a) L'insieme I_α è un insieme limitato. Vera Falsa
- (b) L'insieme I_α ammette minimo. Vera Falsa
- (c) L'insieme I_α ammette un solo punto di accumulazione. Vera Falsa

Inoltre

- (d) $\inf I_\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (3 punti) Sia

$$f(x) = 2 \log(1 + 3x) - e^{3x} + e^{-3x} + 9x^2.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a) Esiste $r > 0$ tale che la funzione $f(x) < 0$ in $] -r, 0[$. Vera Falsa
- (b) Esiste $r > 0$ tale che la funzione $g(x) = \arctan(f(x))$ ha segno costante in $] -r, r[$. Vera Falsa
- (c) $g(x) = o(\sin x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Vera Falsa

- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente. Vera Falsa

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (5 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

- (a) Provate che $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Verificate che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente e determinate la sua somma.
- (c) Essa è assolutamente convergente?

12. (5 punti) Sia $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = 3x^2$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1.$$

- (a) Determinate $y(0)$.
- (b) Studiate brevemente la funzione $y(x)$; in particolare provate che $y(x)$ ammette un unico punto critico x_0 e $x_0 \in]-2, -1[$. Tracciate un grafico qualitativo di $y(x)$.