

COGNOME E NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: 

--	--	--	--	--	--

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	2	3	2	3	3	2
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		<b>Totale</b>
Punti	3	2	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia  $f : [-4, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \log(x^3 + 4x^2 - 3x + 2).$$

Allora

- (a)  $f$  ha un punto critico in  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 (b)  $f$  ha un punto di massimo assoluto in  $x = \underline{\hspace{2cm}}$  e un punto di minimo assoluto in  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 (c)  $f([-4, 0]) = [\log a, \log b]$  con  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 (d) la funzione  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  è strettamente crescente su  $[-4, 0]$ .    ☐ Vera    ☐ Falsa

2. (2 punti) Sia  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2 \cos x \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo e  $0 \in I$ . Allora il polinomio di Taylor di  $y(x)$  di ordine 3 centrato in  $x_0 = 0$  è dato da

$$P_{3,0}(x) = a + bx + c \frac{x^2}{2} + d \frac{x^3}{3!}$$

con  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $d = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. (3 punti) Sia

$$A = \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx.$$

Allora

$A = ae^b + c$ , dove  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. (2 punti) Sia

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin 2x} (e^{t^2} - 1) dt}{\arctan \frac{x^3}{3}}.$$

Allora  $L =$  \_\_\_\_\_.

5. (3 punti) Sia  $g(x) = \frac{\arctan x}{x}$  per ogni  $x \neq 0$  e sia  $f$  la sua estensione continua a tutto  $\mathbb{R}$ . Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a)  $F$  è decrescente su  $] -\infty, 1]$  e crescente su  $[1, +\infty[$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (b)  $F$  ammette un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (c)  $F$  è derivabile 2 volte in  $x_0 = 0$  e  $F''(0) = 0$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (d)  $F$  è  $C^2(\mathbb{R})$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (e)  $F$  è dispari. ☐ Vera ☐ Falsa

6. (3 punti) Per ogni integrale improprio dato, sia  $E_\alpha$  l'insieme degli  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  per cui esso risulta convergente. Allora

- (a) per  $\int_0^{+\infty} \frac{2 + e^{-x^\alpha}}{x^{\alpha-1}(x + 2\pi)} dx$  si ha  $\inf E_\alpha =$  \_\_\_\_\_.
- (b) per  $\int_0^1 \frac{\log(2-x)^\alpha}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2} \arctan(x^{\frac{\alpha}{2}})} dx$  si ha  $\sup E_\alpha =$  \_\_\_\_\_.
- (c) per  $\int_4^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{\log^{\frac{\alpha}{8}} x}\right) \right)^2 dx$  si ha  $\inf E_\alpha =$  \_\_\_\_\_.

7. (2 punti) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . ☐ Sì ☐ No
- (b) La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente. ☐ Sì ☐ No
- (c) La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a_n^2)$  è convergente. ☐ Sì ☐ No
- (d) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  è convergente. ☐ Sì ☐ No

8. (3 punti) Siano

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(\sin x + 1))}{\log(\arctan 2x)}; \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4})^{-1}}{\log(x+2)}.$$

Allora  $L_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  e  $L_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. (2 punti) Sia  $I_\alpha$  l'insieme degli  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n^3 + \log n^3)}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}} \arcsin\left(\frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha}\right).$$

Stabilite per ciascuna delle tre seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a) L'insieme  $I_\alpha$  è un insieme limitato.   ☐ Vera   ☐ Falsa  
 (b) L'insieme  $I_\alpha$  ammette minimo.   ☐ Vera   ☐ Falsa  
 (c) L'insieme  $I_\alpha$  ammette un solo punto di accumulazione.   ☐ Vera   ☐ Falsa

Inoltre

- (d)  $\inf I_\alpha =$  \_\_\_\_\_.

10. (3 punti) Sia

$$f(x) = 2\log(1 + 3x) - e^{3x} + e^{-3x} + 9x^2.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

- (a) Esiste  $r > 0$  tale che la funzione  $f(x) < 0$  in  $] - r, 0[$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (b) Esiste  $r > 0$  tale che la funzione  $g(x) = \arctan(f(x))$  ha segno costante in  $] - r, r[$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (c)  $g(x) = o(\sin x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ . ☐ Vera ☐ Falsa
- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{1}{\sqrt{n}})$  è convergente. ☐ Vera ☐ Falsa

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (5 punti) Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  siano

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

(a) Provate che  $a_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Verificate che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  è convergente e determinate la sua somma.

(c) Essa è assolutamente convergente?

12. (5 punti) Sia  $y(x)$  la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = 3x^2$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1.$$

(a) Determinate  $y(0)$ .

(b) Studiate brevemente la funzione  $y(x)$ ; in particolare provate che  $y(x)$  ammette un unico punto critico  $x_0$  e  $x_0 \in ]-2, -1[$ . Tracciate un grafico qualitativo di  $y(x)$ .