Università di Trento - Dipartimento di Matematica - CdL in Fisica e CdL in Matematica
Seconda Prova Intermedia di Analisi Mat.I - Analisi Mat.A, 10 gennaio 2022

$\boxed{B}$

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	2	3	2	2	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	2	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Siano

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log(\sin x + 1))}{\log(\arctan 2x)}; \qquad L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)^{-1}}{\log(x+2)}.$$

Allora $L_1 =$ ______ e $L_2 =$ ______.

2. (3 punti) Sia

$$f(x) = 2\log(1+3x) - e^{3x} + e^{-3x} + 9x^2.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) Esiste $r > 0$ tale che la funzione $f(x) < 0$ in $]-r, 0[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) Esiste $r > 0$ tale che la funzione $g(x) = \arctan(f(x))$ ha segno costante in $]-r, r[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) $g(x) = o(\sin x^2)$ per $x \to 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente. ◯ Vera ◯ Falsa

3. (2 punti) Sia

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin 2x} (e^{t^2} - 1)\,dt}{\arctan \dfrac{x^3}{3}}.$$

Allora $L =$ ______.

4. (3 punti) Sia $f : [-4,0] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \log(x^3 + 4x^2 - 3x + 2).$$

Allora

(a) f ha un punto critico in $x =$ ______.

(b) f ha un punto di massimo assoluto in $x =$ ______ e un punto di minimo assoluto in $x =$ ______.

(c) $f([-4,0]) = [\log a, \log b]$ con $a =$ ______ e $b =$ ______.

(d) la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è strettamente crescente su $[-4,0]$. ◯ Vera ◯ Falsa

5. (2 punti) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(\frac{1}{n}) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. ◯ Sì ◯ No

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. ◯ Sì ◯ No

(c) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a_n^2)$ è convergente. ◯ Sì ◯ No

(d) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è convergente. ◯ Sì ◯ No

6. (2 punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n^3 + \log n^3)}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}} \arcsin\left(\frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha}\right).$$

Stabilite per ciascuna delle tre seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme I_α è un insieme limitato. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) L'insieme I_α ammette minimo. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) L'insieme I_α ammette un solo punto di accumulazione. ◯ Vera ◯ Falsa

Inoltre

(d) $\inf I_\alpha =$ ______.

7. (3 punti) Sia

$$A = \int_e^{e^{e^2}} \frac{\log(\log x)}{x} dx\,.$$

Allora

$A = ae^b + c$, dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

8. (3 punti) Sia $g(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$ per ogni $x \neq 0$ e sia f la sua estensione continua a tutto $\mathbb{R}$. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) F è decrescente su $]-\infty, 1]$ e crescente su $[1, +\infty[$. ○ Vera ○ Falsa

(b) F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. ○ Vera ○ Falsa

(c) F è derivabile 2 volte in $x_0 = 0$ e $F''(0) = 0$. ○ Vera ○ Falsa

(d) F è $C^2(\mathbb{R})$. ○ Vera ○ Falsa

(e) F è dispari. ○ Vera ○ Falsa

9. (3 punti) Per ogni integrale improprio dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora

(a) per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2 + e^{-x^\alpha}}{x^{\alpha-1}(x + 2\pi)} dx$ si ha $\inf E_\alpha =$______.

(b) per $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(2-x)^\alpha}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\arctan(x^{\frac{\alpha}{2}})} dx$ si ha $\sup E_\alpha =$______.

(c) per $\displaystyle\int_4^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\big(\frac{1}{\log^{\frac{\alpha}{8}} x}\big)\Big)^2 dx$ si ha $\inf E_\alpha =$______.

10. (2 punti) Sia $y : I \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2\cos x \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $0 \in I$. Allora il polinomio di Taylor di $y(x)$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ è dato da

$$P_{3,0}(x) = a + bx + c\frac{x^2}{2} + d\frac{x^3}{3!}$$

con $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______ e $d =$ ______.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (5 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx.$$

(a) Provate che $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verificate che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente e determinate la sua somma.

(c) Essa è assolutamente convergente?

12. (5 punti) Sia $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2$$

tale che

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) e^{-x} = 1.$$

(a) Determinate $y(0)$.

(b) Studiate brevemente la funzione $y(x)$; in particolare provate che $y(x)$ ammette un unico punto critico x_0 e $x_0 \in]-2, -1[$. Tracciate un grafico qualitativo di $y(x)$.