 A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	3	3	3	2	4
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	2	4	3		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Siano $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = 3x, \qquad g(x) = x^3.$$

Allora si ha $\|f - g\|_\infty =$ ______ e $\|f - g\|_1 =$ ______.

2. (3 punti) Sia $(f_n)_{n>0}$ la successione di funzioni continue su $[-1, 1]$ definite da $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$ e sia f la funzione identicamente nulla su $[-1, 1]$.
Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha

(a) $d_\infty(f_n, f) =$ ______.

(b) $d_1(f_n, f) =$ ______.

Stabilite se è vero o falsa l'affermazione che $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

○ Vera ○ Falsa

3. (3 punti) Sia $f(x, y) = \arcsin(\dfrac{x^2 + y^2}{2y})$ e sia A il suo insieme di definizione. Rappresentate A qui a fianco.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme A è convesso. ○ Vera ○ Falsa

(b) L'insieme $\overline{A}$ è compatto. ○ Vera ○ Falsa

(c) L'immagine di f è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ○ Vera ○ Falsa

(d) La funzione f ha massimo e minimo su A per il teorema di Weierstrass. ○ Vera ○ Falsa

4. (3 punti) Sia $f(x) = x \log x$.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   (a) f è lipschitziana su $]0,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________
   (b) f è uniformemente continua su $]0,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________
   (c) f è lipschitziana su $]1,b[$ per $b > 1$ fissato. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

5. (3 punti) Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa (se è falsa costruite un controesempio; basta prendere $n = 1$).
   (a) A chiuso, B (seq.) compatto $\implies$ $A \cap B$ limitato. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________
   (b) A chiuso, B (seq.) compatto $\implies$ $A \cup B$ (seq.) compatto. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________
   (c) A chiuso, B aperto, $A \subseteq B$ $\implies$ $\partial A \subseteq A \cap B$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________
   (d) A aperto, B chiuso, $A \cap B \neq \emptyset$ $\implies$ $\mathring{B} \neq \emptyset$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

6. (2 punti) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ la successione definita da $x_n = n(\cos n\pi) \sin \dfrac{1}{2n}$. Allora si ha

   $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n =$ ______ e $\limsup\limits_{n \to +\infty} x_n =$ ______.

7. (4 punti) Sia A l'insieme di definizione di $f(x,y) = \sqrt{-y - x^2}$. Rappresentate A qui a fianco.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.
   (a) L'insieme A è connesso per poligonali. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) L'insieme $A \cap \overline{B}_1(\mathbf{0})$ è compatto. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) $(0,-1)$ è un punto di accumulazione per $A \cap B_1(\mathbf{0})$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) Esiste $\lim\limits_{\substack{(x,y) \in A \\ \|(x,y)\| \to +\infty}} f(x,y)$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Sia $E = \overline{B}_{1,d_1}(0,-1)$. Allora $\min\limits_{(x,y) \in E} f(x,y) =$ ______ e $\max\limits_{(x,y) \in E} f(x,y) =$ ______.

8. (3 punti) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $\mathbf{x}_0 \in E$. Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

   (a) $\exists$ una successione $(\mathbf{x}_h)_h \subseteq E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ tale che $\lim\limits_{h\to+\infty} \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_0$ ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

   (b) $\forall r > 0$ si ha $B_r(\mathbf{x}_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

   (c) $\mathbf{x}_0 \in \partial E$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

   (d) Ogni successione $(\mathbf{x}_h)_h \subseteq E \cap \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$, $r > 0$, ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento $\widehat{\mathbf{x}} \in E$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

9. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   (a) f è continua in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (b) f è derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (c) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

   (d) f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perchè? ______________________________

10. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ |y| \geq x^2 \text{ o } y = 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   (a) f è continua, ma non derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (b) f è derivabile, ma non è continua in $(0,0)$, ◯ Vera ◯ Falsa

   (c) f è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e vale $D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (d) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

11. (4 punti) (a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = e^{\sqrt{3}x^2 - 2y}$.
Se ϑ è la direzione $v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ lungo cui è massima la crescita della funzione $f(x,y)$ nel punto $(1,1)$, si ha $\vartheta =$ ______.

(b) Sia f la funzione definita in (a), sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Se E è l'insieme degli α per cui g è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ si ha $\inf E =$ ______

Perchè? ____

12. (3 punti) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \cos(\beta y + x)$.
Il piano tangente al grafico di f nel punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ è parallelo alla retta di equazione $2x = 2y = z$ per $\beta =$ ______.

Perchè? ____