2021-12-01 Test di autovalutazione

1. **2021-01-12-01**

   Sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Il limite

   $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x}+\frac{4}{\log(1+\alpha x)}\right)$$

   esiste ed è finito se e solo se $\alpha=$ ___.

   Il valore del limite per tale α è uguale a ___.

2. **2021-01-12-02**

   Siano

   $$L_1=\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}\,; \qquad L_2=\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}}\log(x-2)\,.$$

   Allora $L_1 =$ ___ e $L_2 =$ ___.

3. **2021-01-12-03**

   Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(x)=o(1)$ per $x\to 0$. Se si ha

   $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}=6,$$

   allora

   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$$

   è uguale a ___.

4. **2021-01-12-04**

   Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sia convergente.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

   (a) Si ha $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$.

Vera
Falsa

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente.

Vera
Falsa

(c) Il limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ esiste finito.

Vera
Falsa

(d) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ è convergente.

Vera
Falsa

5. **2021-01-12-05**

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin a_n$ è convergente.

Sì
No

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin n$ è assolutamente convergente.

Sì
No

(c) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n + a_n}$ è convergente.

Sì
No

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

Sì
No

6. **2021-01-12-06**

Quante delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{\frac{2}{n^2\sqrt{n}}} - 1\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2+n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n^3} - 1\right)^2$$

sono convergenti?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

7. **2021-01-12-07**

Stabilite per ciascuna delle seguenti tre serie se la seguente affermazione è vera o falsa: "La serie è convergente per il criterio della radice n-esima".

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n^2}$

Vera
Falsa

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n-1}{3n+2}\Big)^{n}$

Vera
Falsa

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n+n\log^2 n}$

Vera
Falsa

8. **2021-01-12-08**

Quale delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n(n!)^2}$$

diverge per il criterio del rapporto?

(a) Nessuna
(b) La prima
(c) La seconda
(d) La terza

9. **2021-01-12-09**

Stabilite quale delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2+\arctan n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}(x+1)^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}(x-1)^n$$

ha come insieme di convergenza un intervallo chiuso e limitato.

Se $E = [a, b]$ indica tale insieme di convergenza, allora $a =$ ___ e $b =$ ___.

10. **2021-01-12-10**

    Sia E_α l'insieme dei numeri reali $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per i quali la serie

    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1\Big) n^{3-\alpha}$$

    è convergente.

    Allora $\inf E_\alpha =$ ___.

11. **2021-01-12-11**

    Siano date le serie

    $$\text{a)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n \qquad \text{b)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 3)^n}{n!}.$$

    La somma della serie in a) è ___ e la somma della serie in b) è ___.

12. **2021-01-12-12**

    L'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

    $$f(x) = 1 + \sin\frac{x^2}{2} - \cos x - \log(1 + x^2)$$

    rispetto all'infinitesimo campione x è $\alpha =$ ___ e la parte principale dell'infinitesimo è $\dfrac{a}{b} x^\alpha$ con $a =$ ___ e $b =$ ___.

13. **2021-01-12-13**

    Calcolate il limite

    $$\lim_{x \to 0^+} \frac{3(e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e}))}{x(\arctan x^2)\cosh(\sin x)}.$$

    Esso vale ___.

14. **2021-01-12-14**

    Quale dei seguenti è il polinomio di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) = xe^x$ centrato in $x_0 = 1$?

    (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k+1)e(x-1)^k$

    (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{(k+1)}{k!}e(x+1)^k$

    (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{(k+1)}{k!}e^k(x-1)^k$

    (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{(k+1)}{k!}e(x-1)^k$

15. **2021-01-12-15**

    Sia $f \in \mathcal{C}^1(]-1,1[)$ con $f'(0) < 0$. Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se segue dalle ipotesi.

    (a) f è strettamente decrescente in un intorno di 0. | Sì | No |

    (b) f ha segno costante in un intorno di 0. | Sì | No |

    (c) f è concava in un intorno di 0. | Sì | No |

    (d) $\lim_{x\to 0} f'(x) < 0$. | Sì | No |

16. **2021-01-12-16**

    Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $[0,1]$ tale che

    $$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f'(0) = 4, \quad f''(x) < 0,\ \forall x \in [0,1].$$

    Quante delle seguenti affermazioni sono vere?

    1. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f(x) \geq 2x$.
    2. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f(x) \leq 4x$.

3. La funzione f' è strettamente decrescente su $[0,1]$.
4. Esiste $x \in [0,1]$ tale che $f'(x) = 3$.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

17. **2021-01-12-17**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Se $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$, allora $y = 2x$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.

Vera
Falsa

(b) Se $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$, allora esiste un asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

Vera
Falsa

(c) Se $f(x) = 2x + o(1)$ per $x \to +\infty$, allora f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Vera
Falsa

(d) Se si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, allora f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Vera
Falsa

(e) Se f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, allora si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Vera
Falsa

18. **2021-01-12-18**

Calcolate il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \displaystyle\int_0^x e^{-3t^2}\, dt}{\sin x^3}.$$

Esso vale $\overline{}$.