

1) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} + \frac{4}{\log(1+\alpha x)} \right)$ si presenta nella forma indeterminata $[-\infty + \infty]$; scriviamo

$$\frac{x-1}{x} + \frac{4}{\log(1+\alpha x)} = \frac{(x-1) \log(1+\alpha x) + 4x}{x \log(1+\alpha x)}$$

Ora, tenendo conto che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, e $t = \alpha x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{(x-1) \log(1+\alpha x) + 4x}{x \log(1+\alpha x)} &= \frac{(x-1) \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) \right] + 4x}{x [\alpha x + o(x)]} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ &= \frac{\alpha x^2 - \alpha x - \frac{\alpha^2}{2} x^3 + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + o(x^2) + 4x}{\alpha x^2 + o(x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ &= \frac{(4-\alpha)x + \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)}{\alpha x^2 + o(x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} + \frac{4}{\log(1+\alpha x)} \right)$

esiste ed è finito $\Leftrightarrow 4-\alpha=0$, ossia $\alpha=4$. Il valore del limite per $\alpha=4$ risulta $\frac{4 + \frac{16}{2}}{4} = \frac{12}{1} = 3$. □

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

Abbiamo $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \cdot 2\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{2};$

quindi dal teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$,
 ossia $\underline{L_1 = 1}$. □

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} \log(x-2) = [0 \cdot (-\infty)] \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\log(x-2)}{e^{\frac{1}{x-2}}} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{\infty}$

Abbiamo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x-2}}{e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right)} = - \frac{(x-2)}{e^{\frac{1}{x-2}}} \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 0;$$

quindi dal teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} \log(x-2) = 0$,
ossia $L_2 = 0$. ■

3) Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{0}{0}$ poiché $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow 0$.

Cerchiamo di applicare il teorema di de l'Hôpital; si ha

$$\frac{f'(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \frac{f'(x)}{x^2};$$

per ipotesi quindi $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$. Dal teorema di de l'Hôpital segue allora che $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ e vale 2. ■

4) Sia $(a_n)_n$, con $a_n \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente.

(a) Si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$: Vera. Infatti, poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convrg.

si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, ma quest'ultimo limite è
equivalente al limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$. □

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente: Falsa. Basta considerare

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$ (e per es. $a_0 = 0$). Allora
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente per il criterio di Leibniz,
mentre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positiv. □

(c) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$ esiste finito: Vera.

Infatti, $\forall n \geq 0$ sia $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Allora $(s_n)_n$ è
la successione delle somme parziali relativa alla
successione $(a_n)_n$. Per def. di serie convergente
risulta che esiste finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. □

(d) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a_n è convergente: **Falsa**

Basta prendere $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\forall n \geq 1$. Allora per il criterio di Leibniz sappiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ è convergente, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positivo.

(vedi anche pt. (b)).

5) Sia $(a_n)_n$ una successione di nr. reali positivi tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$.
Per il criterio del rapporto per serie a termini positivi possiamo dunque asserire che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(a) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin a_n$ è convergente. **(Sì)**

Basta oss. che $0 \leq \sin a_n \leq a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$;

dal criterio del confronto per serie a termini non-negativi segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin a_n$ è convergente poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ lo è. $\square$

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin n$ è assolut. convergente **(Sì)**.

Oss. $0 \leq |a_n \sin n| \leq |a_n| = a_n \quad \forall n \geq 0$.

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, dal criterio del confronto per serie a termini non-negativi segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \sin n|$ è convergente. Per def. risulta che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin n$ è assolut. convergente. $\square$

(c) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n + a_n}$ è convergente **(No)**.

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, risulta che $\frac{1}{n \log n + a_n} \sim \frac{1}{n \log n}$ per $n \rightarrow +\infty$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ è divergente positivo, dal criterio del confronto asintotico segue che $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n + a_n}$ è divergente positivo, e quindi non convergente. $\square$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{4}$ **(No)** Possiamo considerare, per esempio,

$$a_n = \frac{1}{4^n} \quad \forall n \geq 0. \quad \text{Allora} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot 4^n = \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

$$\text{Risulta pu\`o} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{4}.$$

6) Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n \left(e^{\frac{2}{n^2 \sqrt{n}}} - 1 \right)}_{a_n}$$

$$\bullet a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\bullet a_n \sim \cancel{n} \cdot \frac{2}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{2}{n \sqrt{n}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

ricordate che
 $e^x - 1 = x + o(x)$
 per $x \rightarrow 0$

Poich\`e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$  \`e convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data \`e convergente. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2+n}}}_{a_n}$$

$$\bullet a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\bullet a_n = \frac{(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \left((\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1} \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2 \right)}{\sqrt{2+n} \left((\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1} \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2 \right)}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{2+n} \left((\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1} \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2 \right)}$$

$$\sim \frac{1}{3 \sqrt{n} (\sqrt[3]{n})^2} = \frac{1}{3 n^{1/2 + 2/3}} = \frac{1}{3 n^{7/6}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Poich\`e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3 n^{7/6}}$  \`e convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data \`e convergente. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n^3} - 1 \right)^2}_{a_n}$$

$$\bullet a_n > 0 \quad \forall n > 1$$

$$\bullet a_n = \left(e^{\frac{1}{n} \log n^3} - 1 \right)^2 = \left(e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right)^2$$

$$\sim \frac{9 (\log n)^2}{n^2} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Poich\`e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9 (\log n)^2}{n^2}$  \`e convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data risulta convergente.

In definitiva, tutte e 3 le serie date sono convergenti. $\blacksquare$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}}_{a_n} : \sqrt[n]{a_n} = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e} < 1.$$

Vera la serie è convergente per il criterio della radice n-esima. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{n-1}{3n+2} \right)^n}_{a_n} : \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n-1}{3n+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} < 1.$$

Vera la serie è convergente per il criterio della radice n-esima. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{n+n \log^2 n}}_{a_n} : \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n+n \log^2 n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Falsa Dal criterio della radice n-esima non segue che la serie è convergente.

La serie è convergente poiché $a_n \sim \frac{2}{n \log^2 n}$ per $n \rightarrow +\infty$ e la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n \log^2 n}$ è convergente. $\blacksquare$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n!}{(2n)!}}_{a_n} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

La serie converge per il criterio del rapporto. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}}_{a_n} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)+1)!}{((n+1)+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+2)^n(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto. $\square$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(2n)!}{n(n!)^2}}_{a_n} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)((n+1)!)^2} \cdot \frac{n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4 > 1$$

La serie diverge per il criterio del rapporto. $\square$

Risposta corretta: (d) $\blacksquare$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\underbrace{2+\arctan n}_{a_n}} x^n$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3}{2+\arctan n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
 Risulta allora che il raggio di converg. della serie di potenze data è $r=1$.

La serie converge sicuramente $\forall x \in]-1, 1[$.

Per $x=-1$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2+\arctan n} (-1)^n$

Notiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3}{2+\arctan n} (-1)^n \right| = \frac{3}{2+\pi/2} \neq 0$

quindi la serie non soddisfa la cond. nec. per la convergenza di una serie.

Per $x=1$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2+\arctan n}$ che non converge per quanto appena oss. sopra.

In definitiva, l'insieme di converg. della serie data è

$E =]-1, 1[$. □

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{n^2 2^n}_{a_n}} (x+1)^n$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Risulta allora che il raggio di converg. della serie di potenze data è $r=2$.

La serie converge sicuramente $\forall x \in]-3, 1[$.

Per $x=-3$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n$ che converge

assolutamente e quindi converge.

Per $x=1$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente.

In definitiva, l'insieme di converg. della serie data è

$E = [-3, 1]$.

Quindi $E = [a, b]$ con $a = -3$ e $b = 1$. □

Controlliamo che l'ultima serie data non ha come insieme di

convergenza un insieme chiuso e limitato:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{a_n}} (x-1)^n$: Usiamo il criterio del rapporto per

la determinazione del raggio di convergenza. Abbiamo

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \text{ Quindi il raggio di convergenza}$$

della serie data è $r=1$. La serie quindi converge

sicuramente $\forall x \in]0, 2[$.

Per $x=0$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{\sqrt{n+1}}$ che è

una serie divergente negativa.

Per $x=2$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ che converge per il criterio di Leibniz.

In definitiva, l'insieme di convergenza della terza serie data è $E =]0, 2]$, che è un insieme limitato, ma non chiuso. ■

10) sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right)}_{a_n > 0} n^{3-\alpha}.$

Oss. che $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right) n^{3-\alpha} = \left(\frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right) n^{3-\alpha}$ per $n \rightarrow +\infty$

ricordare che $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e quindi

$$a_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha-3}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-3}}$ converge $\Leftrightarrow 2\alpha-3 > 1$, ossia $\alpha > 2$ dal criterio del confronto asintotico segue che la serie data converge se e solo se $\alpha > 2$. Quindi $\inf E_\alpha = \inf]2, +\infty[= 2$. ■

11) a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 = 4 - 1 = \underline{\underline{3}}$.
serie geom. di ragione $q = \frac{3}{4}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 3)^n}{n!} = e^{\log 3} = \underline{\underline{3}}$ (ricordare che $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \forall x \in \mathbb{R}$)

Quindi, la somma della serie in a) è 3 e la somma della serie in b) è 3. ■

12) $f(x) = 1 + \sin \frac{x^2}{2} - \cos x - \log(1+x^2)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$.

Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \quad "$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad "$$

Poiché $t = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ e $t = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^4}{2}} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{-1+12}{24} x^4 + o(x^4) = \frac{11}{24} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Risulta allora che l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di $f(x)$

rispetto all'infinitesimo campione x è $\alpha = 4$ e la parte

principale dell'infinitesimo è $\frac{a}{b} x^\alpha$ con $a=11$ e $b=24$. $\blacksquare$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e}))}{x(\operatorname{arctg} x^2) \cosh(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(e^{\sin x} + \log(1-x) - 1)}{x(\operatorname{arctg} x^2) \cosh(\sin x)} \quad \begin{matrix} \swarrow x \rightarrow 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \searrow x \rightarrow 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor al 3° ordine centrato in 0 per e^t ,

con $t = \sin x$ e per $\log(1+t)$ con $t = -x$, otteniamo

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre, tenendo conto che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Allora

$$\frac{3(e^{\sin x} + \log(1-x) - 1)}{x(\operatorname{arctg} x^2) \cosh(\sin x)} = \frac{3\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{1}\right)}{x^3 + o(x^3)} =$$

ossia

$$\frac{3(e^{\sin x} + \log(1-x) - 1)}{x(\operatorname{arctg} x^2) \cosh(\sin x)} = \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} ;$$

$$\text{quindi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e}))}{x(\operatorname{arctg} x^2) \cosh(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \underline{\underline{-1}}.$$

14) $f(x) = xe^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= e^x + xe^x && \leadsto f^{(1)}(1) = 2e \\ f^{(2)}(x) &= 2e^x + xe^x && \leadsto f^{(2)}(1) = 3e \\ f^{(3)}(x) &= 3e^x + xe^x && \leadsto f^{(3)}(1) = 4e \\ f^{(4)}(x) &= 4e^x + xe^x && \leadsto f^{(4)}(1) = 5e \end{aligned}$$

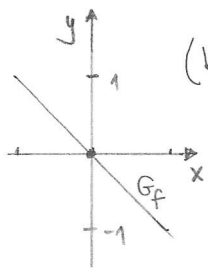
Poich  $P_{4,1}(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$   il polinomio di Taylor di f di ordine 4 centrato in $x_0=1$, si ottiene $P_{4,1}(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{(k+1)e}{k!} (x-1)^k$.

Risposta corretta: (d)

15) Sia $f \in \mathcal{C}^1(-1, 1[)$ con $f'(0) < 0$.

(a) f   strett. decrescente in un intorno di 0 (Si).

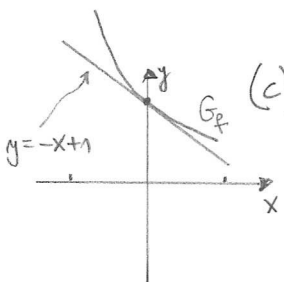
Infatti, essendo f' continua su $]-1, 1[$, dal teorema di permanenza del segno segue che $\exists r > 0$ t.c. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]-r, r[$.
Quindi f   strett. decrescente su $]-r, r[$. $\square$



(b) f ha segno costante in un intorno di 0 (No)

Basta considerare $f(x) = -x$ su $]-1, 1[$. Allora $f \in \mathcal{C}^1(-1, 1[)$ e $f'(x) = -1$ su $]-1, 1[$; in particolare $f'(0) < 0$.

Ma $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ su $]-1, 0[$ e $f(x) < 0$ su $]0, 1[$. $\square$



(c) f   concava in un intorno di 0 (No)

Basta prendere $f(x) = e^{-x} \in \mathcal{C}^1(-1, 1[)$ $f'(x) = -e^{-x} < 0$ $\forall x \in]-1, 1[$; in particolare $f'(0) = -1 < 0$.

Ma f   convessa su $]-1, 1[$ ($f''(x) = e^{-x} > 0$ su $]-1, 1[$).

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) < 0$ (Si) Infatti, essendo f' continua su $]-1, 1[$ $\square$

si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) < 0$. ■

16) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $[0,1]$ tale che

$$f(0)=0 \quad f(1)=2 \quad f'(0)=4 \quad f''(x) < 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

i) Da $f''(x) < 0$ su $[0,1]$ si deduce che f è strett. concava su $[0,1]$.

ii) Da $f(0)=0$ e $f'(0)=4$ si deduce che la retta tg al grafico di f in $(0,0)$ è $y=4x$.

1. $y=2x$ è l'eq. della retta passante per $(0,0)$ e $(1,2)$. Essendo f concava si ha $f(x) \geq 2x \quad \forall x \in [0,1]$.

2. Segue da i) e ii).

3. Poiché $f''(x) < 0 \quad \forall x \in [0,1]$ segue che $f'(x)$ è strett. decrescente su $[0,1]$.

4. Per il teorema di Lagrange applicato ad f in $[0,1]$ si ha che

$$\exists c \in]0,1[\text{ t.c. } f(1)-f(0)=f'(c), \text{ ossia } f'(c)=2.$$

D'altra parte $f'(0)=4$. Per la continuità di f' esiste $x \in [0,1]$ tale che $f'(x)=3$.

Risposta corretta: (d) ■

17) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

(a) Se $f(x) \sim 2x$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $y=2x$ è un asintoto obliquo di f per $x \rightarrow +\infty$. Falsa.

Basta considerare $f(x)=2x+1$. Allora $f(x) \sim 2x$ per $x \rightarrow +\infty$

$$\text{poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x} = 1, \text{ ma } y=2x \text{ non}$$

è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$ ($f(x)-2x \neq o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$) □

(b) se $f(x) \sim 2x$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $\exists$ un asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow +\infty$ Falsa.

Basta considerare $f(x)=2x+\sqrt{x}$. Allora $f(x) \sim 2x$ per $x \rightarrow +\infty$

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{2x} = 1$, ma $f(x) = 2x + \sqrt{x}$
non ha asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$! $\square$

(c) Se $f(x) = 2x + o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$, allora f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ **Vera**

Per definizione $y = 2x$! $\square$

(d) Se si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, allora f ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ **Falsa**

Basta prendere $f(x) = \log(1+x^2)$. $\square$

(e) Se f ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$, allora si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ **Falsa**

Basta prendere $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ma $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2} \\ &= 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \end{aligned}$$

$\nexists$ limite $\left(\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 \end{matrix} \right)$ $\blacksquare$

18) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \int_0^x e^{-3t^2} dt}{\sin x^3} = \frac{0}{0}$

Oss. che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{1 - e^{-3x^2}}{3x^2 \cos x^3} = \frac{1 - 1 + 3x^2 + o(x^2)}{3x^2 \cos x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

oppure usando
semplic. il limite notevole $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

Dal teorema di de l'Hôpital segue quindi che il limite dato vale 1. $\blacksquare$