2020-12-15

1. **2021-15-12-01**

   Siano
   $$A = \int_{-1}^{3} ||x+1|-2|\,dx\,; \qquad B = \int_{-1}^{1} (|\sqrt[3]{x}-1| + \arctan x^3)\,dx.$$
   Allora $A = \overline{}$ e $B = \overline{}$.

2. **2021-15-12-02**

   Siano
   $$A = \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,; \qquad B = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{6}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$
   Allora $A = \overline{}$ e $B = \overline{}$.

3. **2021-15-12-03**

   Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

   (a) Esiste $c \in [a,b]$ tale che $(b-a)f(c) = \int_a^b f(t)\,dt$ | Sì | No |

   (b) La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ su $[a,b]$ è continua | Sì | No |

   (c) La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ su $[a,b]$ è monotona | Sì | No |

   (d) Si ha $\int_a^b f(t)\,dt \le f(a)(b-a)$ | Sì | No |

4. **2021-15-12-04**

   Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funzione pari. Sia

   $$I = \int_{-2}^{2} (f(t)) f'(t)\, dt.$$

   Allora $I =$ __

5. **2021-15-12-05**

   Sia

   $$I = 2^3 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 e^{2x^2}\, dx.$$

   Allora I è uguale a __.

6. **2021-15-12-06**

   Sia

   $$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx\,.$$

   Allora $A = \log(\sqrt{a}+1) - \log(\sqrt{b}-1)$, dove $a =$ __ e $b =$ __.

7. **2021-15-12-07**

   Sia μ la media integrale della funzione $f(x) = 2x\sin(2x)$ sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Allora $\mu =$ __.

8. **2021-15-12-08**

   Sia E la regione di piano contenuta nel primo e terzo quadrante e delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \arctan x$ e dalla retta di equazione $y = \frac{\pi}{4}x$. Allora l'area di E è uguale a

(a) $\frac{\pi}{8} - \log \sqrt{2}$
(b) $\frac{\pi}{4} - \log 2$
(c) $\frac{\pi}{8} + \log \sqrt{2}$
(d) $\frac{\pi}{4} + \log 2$

9. **2021-15-12-09**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione parte intera definita da $f(t) = [t]$ e sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
1. La funzione F è continua.
2. Si ha $\lim_{n \to +\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \frac{1}{2}$.
3. La funzione F è crescente su $\mathbb{R}$.
4. Si ha $F'(\pi) = 3$.

(a) La prima
(b) La seconda
(c) La terza
(d) La quarta

10. **2021-15-12-10**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se si ha

$$\int_0^6 f(2t)\, dt = 4,$$

allora

$$\int_0^{12} f(x)\, dx$$

è uguale a $\overline{\quad}$.

11. **2021-15-12-11**

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Se $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, allora f ammette una funzione primitiva.

Vera
Falsa

(b) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ammette una primitiva, allora f è continua in $[a,b]$.

Vera
Falsa

(c) Se $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ è la funzione integrale di $f \in \mathcal{R}([a,b])$ relativa al punto a, allora F_a è una primitiva di f.

Vera
Falsa

(d) Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, allora esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che la funzione integrale $F_a(x)$ di f relativa al punto a soddisfa $m(x-a) \leq F_a(x) \leq M(x-a)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Vera
Falsa

12. **2021-15-12-12**

Determinate, utilizzando la definizione, l'integale

$$L = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}\, dx.$$

Allora $e^L =$ ___.

13. **2021-15-12-13**

Siano date le funzioni

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}}\, dt\,; \qquad G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\, dt\,; \qquad H(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) Esiste finito il limite $\lim_{x \to 1^-} F(x)$.

Vera
Falsa

(b) $x = 1$ è asintoto verticale (da sinistra) per $G(x)$.

Vera
Falsa

(c) $x = 0$ è un asintoto verticale (da destra) per $H(x)$.

Vera
Falsa

(d) $H(x)$ ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Vera
Falsa

14. **2021-15-12-14**

Per ogni integrale generalizzato dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora

(i) per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^\alpha}{x(x+\pi)}\, dx$ si ha $\inf E_\alpha =$ ___.

(ii) per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(x^{\frac{\alpha}{2}} + \pi)}\, dx$ si ha $\inf E_\alpha =$ ___.

(iii) per $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{[\log(2x^2 + e^x)]^\alpha}}\, dx$ si ha $\inf E_\alpha =$ ___.

15. **2021-15-12-15**

Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[7]{(x-2)^8}}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]-1, 0]$.

Vera
Falsa

(b) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]2, 3]$.

Vera
Falsa

(c) La funzione è Riemann integrabile su $[0, 1]$.

Vera
Falsa

(d) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $[4, +\infty[$.

Vera
Falsa

16. **2021-15-12-16**

Dite se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x\log^2(x^2+x)}\,dx$

Sì
No

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{\log(2x+e^x)}}\,dx$

Sì
No

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(1-x^2)}\,dx$

Sì
No

(d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{(e^{-x+2}-1)\sin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}\,dx$

Sì
No

17. **2021-15-12-17**

Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{|t+1|}{\sqrt[3]{t}}\,dt.$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Il dominio di F è un intervallo chiuso e limitato.

Vera
Falsa

(b) F ha un punto critico in $x=-1$.

Vera
Falsa

(c) La funzione F ha un punto di minimo assoluto in $x=0$.

Vera
Falsa

(d) Il punto $(0, F(0))$ è un punto angoloso.

Vera
Falsa