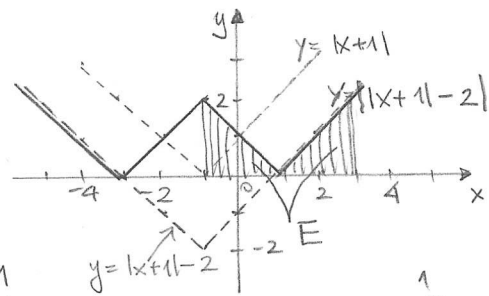


$$1. \underline{A} = \int_{-1}^3 |x+1| - 2| dx$$

$$= \text{area } E = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2}$$

$$= \underline{4}.$$



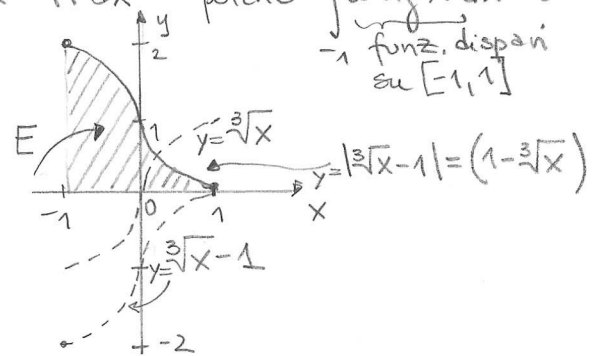
$$\underline{B} = \int_{-1}^1 (|\sqrt[3]{x} - 1| + \arctan x^3) dx = \int_{-1}^1 |\sqrt[3]{x} - 1| dx$$

poiché $\int_{-1}^1 \arctan x^3 dx = 0$
funz. dispari su $[-1, 1]$

$$= \int_{-1}^1 (1 - \sqrt[3]{x}) dx$$

$$= \text{area } E = \left[x - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^1$$

$$= \left(1 - \frac{3}{4} \right) - \left(-1 - \frac{3}{4} \right) = \underline{2}.$$



$$2. \underline{A} = \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = - \int_0^1 \frac{-4x}{\sqrt{4-2x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= -2(4-2x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 + 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^2 = (-2\sqrt{2} + 4) + (2\sqrt{2} - 2)$$

$$= \underline{2}.$$

$$\underline{B} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$$

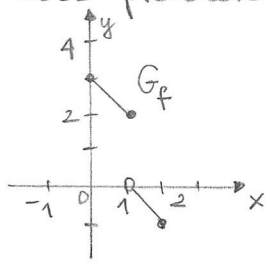
$$= -\frac{6}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx = -\frac{6}{\pi} \left[\arcsin(1-x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \underline{1}.$$

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona decrescente.
Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) Esiste $c \in [a, b]$ tale che $(b-a)f(c) = \int_a^b f(t) dt$. (No)

Basta prendere, per es., $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{su } [0, 1] \\ -x+1 & \text{su } [1, 2] \end{cases}$.



$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1, \text{ ma}$$

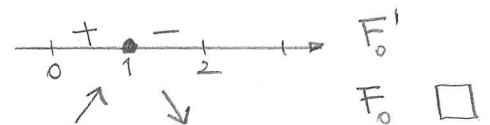
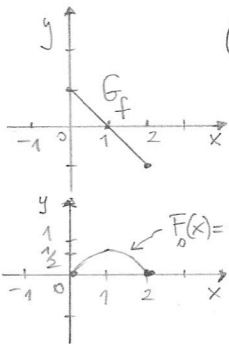
$\nexists c \in [0, 2]$ t.c. $f(c) = 1$. $\square$

(b) La funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su $[a, b]$ è continua. (Sì)

Essendo f monotona su $[a, b]$, si ha $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e quindi F è continua su $[a, b]$ (TFC). $\square$

(c) La funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su $[a, b]$ è monotona. (No)

Basta prendere, per es., $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -x+1$ su $[0, 2]$. Dal TFC si ha $F'_0(x) = f(x)$ su $[0, 2]$.



(d) si ha $\int_a^b f(t) dt \leq f(a)(b-a)$. (Sì)

Infatti, essendo f monotona decrescente su $[a, b]$ si ha

$$f(a) \geq f(t) \quad \forall t \in [a, b] \text{ e quindi}$$

$$\int_a^b f(a) dx \geq \int_a^b f(t) dt \quad \text{ossia} \quad f(a)(b-a) \geq \int_a^b f(t) dt. \blacksquare$$

4. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funzione pari. Sia $I = \int_{-2}^2 (f(t)) f'(t) dt$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \int_{-2}^2 (f(t)) f'(t) dt &= \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [f^2(2) - f^2(-2)] \\ &= 0 \quad \text{poichè } f(2) = f(-2) \text{ essendo } f \text{ pari.} \end{aligned}$$

Allora $I = 0$. $\blacksquare$

5. Sia $I = 2^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 e^{2x^2} dx$. Oss. che

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 e^{2x^2} dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 (4x e^{2x^2}) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[x^2 e^{2x^2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x e^{2x^2} dx \right] = \frac{1}{4} \left[x^2 e^{2x^2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4x e^{2x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} e - \frac{1}{8} \left[e^{2x^2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{1}{8} e - \frac{1}{8} e + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Quindi $\underline{\underline{I = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = 1.}}$ ■

6. Sia $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$.

Abbiamo $\int \frac{1}{\cos x} dx =$

$$\begin{aligned} t = \tan \frac{x}{2} \quad x = 2 \arctan t = \varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow]-\pi, \pi[\\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ = \log |1+t| - \log |1-t| \\ t = \tan \frac{x}{2} \quad = \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| - \log \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right| \\ = \log \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| - \log \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \left[\log \left| \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right| - \log \left| \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \log \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right| - \log \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right| = \underline{\underline{\log(\sqrt{3}+1) - \log(\sqrt{3}-1)}}. \end{aligned}$$

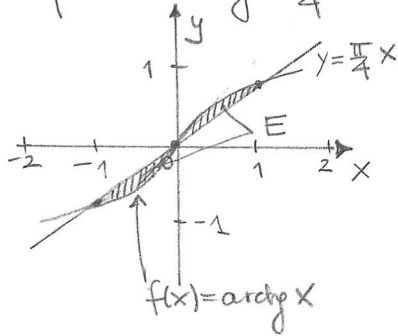
Allora $A = \log(\sqrt{a}+1) - \log(\sqrt{b}-1)$, dove $\underline{\underline{a=3}}$ e $\underline{\underline{b=3}}$. ■

7. $\mu = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(2x) dx$. Ora

$$\begin{aligned} \int 2x \sin(2x) dx &= \cancel{2} \left[x \left(\frac{-\cos(2x)}{\cancel{2}} \right) + \int \frac{\cos(2x)}{\cancel{2}} dx \right] \\ &= -x \cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(2x) dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi}{2} (-1) + 0 \right) - \left(\frac{\pi}{2} (-1) + 0 \right) \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = \underline{\underline{1}}. \end{aligned}$$

8. E la regione di piano contenuta nel primo e terzo quadrante e delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e dalla retta di equazione $y = \frac{\pi}{4} x$.

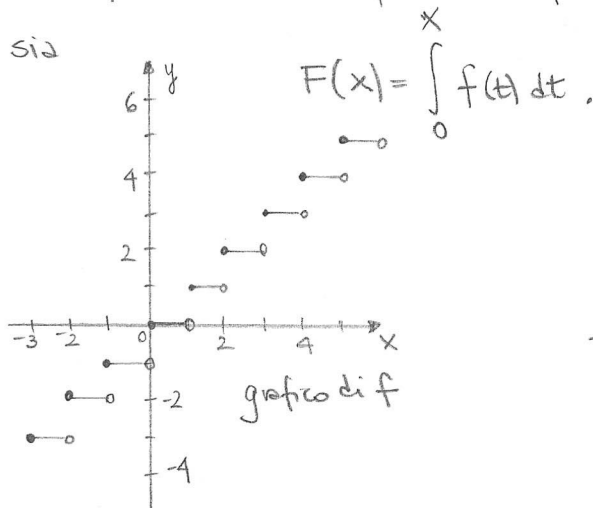


$$\begin{aligned} \text{area } E &= 2 \int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} x \right) dx \\ &= 2 \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 2 \left[\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{8} \right] \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \log 2 \right] = 2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \log 2 \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \log 2}}. \end{aligned}$$

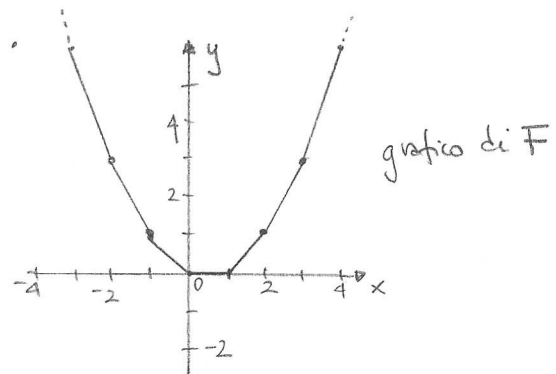
Risposta corretta: (b).

9. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione parte intera definita da $f(t) = [t]$ e

sia



$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$



Quale delle seguenti affermazioni è falsa? $\in \mathcal{R}[a,b] \nmid [a,b] \subset \mathbb{R}$

1. La funzione F è continua (V) : f ha pt. di discontinuità solo di tipo "salto", e quindi F è continua. $\square$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \frac{1}{2} \quad (\vee) : \text{infatti } F(n) = \int_0^n f(t) dt = 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \dots + (n-1) \cdot 1$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) =$$

$$= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ricordate $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} !$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$ $\square$

3. La funzione F è crescente su $\mathbb{R}$ (F):

questo si deduce facilmente dalla def. di $F(x)$ e dal segno di $f(x)$.

Per es. abbiamo $F(-2) = \int_{-2}^0 f(t) dt = 3 > F(1) = 0.$

$(-2 < 1 \text{ ma } F(-2) > F(1) !)$

Si può anche, in alternativa, osservare che $F'(x) = f(x) \forall x \notin \mathbb{Z}$ e

$f(x) < 0 \forall x \in]-\infty, 0[$, mentre $f(x) > 0 \forall x \in [1, +\infty[.$ $\square$

4. Si ha $F'(\pi) = 3$ (V) : infatti $F'(x) = f(x) \forall x \notin \mathbb{Z}.$

Da $f(\pi) = [\pi] = 3$ si ha quindi $F'(\pi) = 3.$ $\square$

Risposta corretta: (c).

10. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, sia $\int_0^6 f(2t) dt = 4.$

Sia $\varphi: [0, 6] \rightarrow [0, 12]$
 $t \mapsto x = 2t \quad \varphi'(t) = 2.$

Ricordiamo che la formula di integrazione per sostituzione assicura

che $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

$\varphi: [c, d] \rightarrow [\varphi(c), \varphi(d)] \quad \varphi \in C^1$
 se $f: [\varphi(c), \varphi(d)] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Quindi $\int_0^{12} f(x) dx = \int_0^6 f(2t) 2 dt.$

Dunque $\int_0^{12} f(x) dx = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8.}}$

11. Stabilire per ciascuna delle seg. affermazioni se è vera o falsa.

(a) Se $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, allora f ammette una primitiva. **Vera**:

Segue dal TFC che assicura che $F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$ è derivabile e $F_c'(x) = f(x)$ nell'ipotesi che $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $c \in [a,b]$ qualsiasi. $\square$

(b) Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ammette una primitiva, allora f è continua in $[a,b]$.

Falsa: Possiamo considerare come $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la derivata della funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases};$$

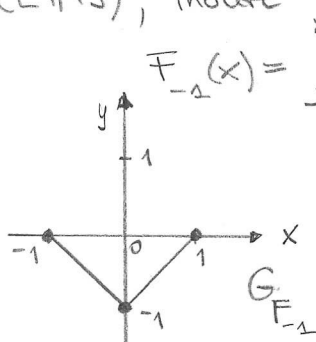
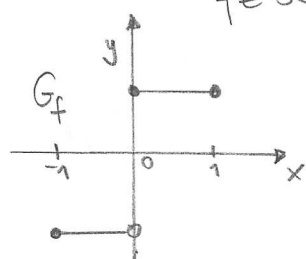
$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Abbiamo F derivabile in $[-1,1]$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-1,1]$ (quindi F è una primitiva di f), ma f non è continua in $x=0$: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. $\square$

(c) Se $F_a: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione integrale di $f \in \mathcal{R}([a,b])$ relativa al pt. a , allora F_a è una primitiva di f . **Falsa**:

Basta considerare $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{su } [-1,0[\\ 1 & \text{su } [0,1]. \end{cases}$

$f \in \mathcal{R}([-1,1])$; inoltre



$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} -x-1 & x \in [-1,0[\\ x-1 & x \in [0,1]. \end{cases}$$

F_{-1} non è derivabile in $x=0$! $\square$

(d) Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, allora $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tali che la funzione integrale $F_a(x)$ di f relativa al punto a soddisfa $m(x-a) \leq F_a(x) \leq M(x-a) \quad \forall x \in [a,b]$. **Vera**:

Infatti, poiché $f \in \mathcal{R}([a, b])$ sono $m, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b].$$

Allora
$$\int_a^x m dt \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x M dt \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui

$$m(x-a) \leq F_a(x) \leq M(x-a) \quad \forall x \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

12.
$$L = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\log x}{(1+x)^2} dx. \quad \text{oss. che}$$

$$\int_1^M \frac{\log x}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \log x \right]_1^M + \int_1^M \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

integrando per parti

$$= \left[-\frac{\log x}{1+x} \right]_1^M + \int_1^M \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{\log x}{1+x} \right]_1^M + \left[\log\left(\frac{x}{1+x}\right) \right]_1^M =$$

$$= -\frac{\log M}{1+M} + \log\left(\frac{M}{1+M}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right).$$

Risulta

$$L = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\log x}{(1+x)^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\log M}{1+M} + \log\left(\frac{M}{1+M}\right) + \log 2 \right] = \log 2.$$

Allora
$$\underline{\underline{e^L = e^{\log 2} = 2.}} \quad \blacksquare$$

13.
$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}} dt; \quad G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt; \quad H(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) Esiste finito il limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$. Vera:

Infatti
$$f(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \text{ per } t \rightarrow 1^-.$$

continua su $[0, 1[$
>0

Quindi $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{\delta > 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}} dt.$

□

(b) $x=1$ è asintoto verticale (da sinistra) per $G(x)$. Falsa:

Infatti $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ per $t \rightarrow 1^-$.

Risulta $\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \in \mathbb{R}$.

□

(c) $x=0$ è un asintoto verticale (da destra) per $H(x)$. Vera:

Abbiamo $H(x) = -\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$; poiché $-\frac{e^{-t}}{t} \leq -\frac{e^{-1}}{t}$ su $]0,1[$,
 $\frac{t}{x} > 0$ su $]0,1[$ continua

risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = -\infty$.

□

(d) $H(x)$ ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Vera:

Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ esiste finito poiché

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$
 poiché funzione crescente!

$0 < \frac{1}{t e^t} \leq \frac{1}{e^t} \quad \forall t \geq 1$

e $\int_1^{+\infty} e^{-t} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t} \right]_1^M = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}$.

■

14. Per ogni integrale generalizzato dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora, per

(i) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^\alpha}{x(x+\pi)} dx$ si ha $E_\alpha =]0, +\infty[\Rightarrow \underline{\inf E_\alpha = 0}$.

$f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua
 $f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ per $x \rightarrow 0^+$ $1-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$
 $f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(x^{\alpha/2} + \pi)} dx$ si ha $E_\alpha =]1, +\infty[\Rightarrow \underline{\inf E_\alpha = 1}$.

$f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua
 $f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^{1/2} \cdot x^{\alpha/2}} = \frac{\pi/2}{x^{(1+\alpha)/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > 1$
 (oss. $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$. L'integrale non è improprio!! in un intorno destro di 0)

iii) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{4 \sqrt{[\log(2x^2 + e^x)]^4}} dx$ si ha $E_d =]2, +\infty[\Rightarrow \underline{\underline{\inf E_d = 2.}}$

$f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$
 $= \frac{1}{x^{1/4 + 1/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow d > 2.$

15. Sia $f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt[3]{(x+1)^4} \sqrt[7]{(x-2)^8}} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^{4/3} (x-2)^{8/7}}.$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]-1, 0]$ **(Vera)**:

$-f(x) = \frac{-x}{(x+1)^{4/3} (x-2)^{8/7}} \sim \frac{+1}{(x+1)^{4/3} 3^{8/7}}$ per $x \rightarrow -1^+$
 note: $\frac{4}{3} < 1$.
 e quindi anche f è integrabile (in senso improprio) su $]-1, 0]$ $\Leftarrow$ $(f \text{ è Riemann integrabile su } [\omega, 0] \forall -1 < \omega < 0 \text{ essendo continua su }]-1, 0])$. $\square$

(b) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]2, 3]$ **(Falsa)**:

$f(x) \sim \frac{6}{3^{4/3} (x-2)^{8/7}}$ per $x \rightarrow 2^+$ nota: $\frac{8}{7} > 1$.

$(f \text{ è Riemann integrabile su } [\omega, 3] \forall 2 < \omega < 3 \text{ essendo continua su }]2, 3])$. $\square$

(c) La funzione è Riemann integrabile su $[0, 1]$ **(Vera)**:

Infatti f è una funzione continua su $[0, 1]$. $\square$

(d) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $[4, +\infty[$ **(Falsa)**:

$f(x) \sim \frac{x^2}{x^{4/3} \cdot x^{8/7}} = \frac{1}{x^{4/3 + 8/7 - 2}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

$f(x) > 0$
 su $[4, +\infty[$
 f continua

Poiché $\frac{4}{3} + \frac{8}{7} - 2 < 1$, abbiamo $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3 + 8/7 - 2}} dx = +\infty$

e per il criterio del confronto asintotico risulta che anche $\int_4^{+\infty} f(x) dx = +\infty$. Quindi f non è integrabile in senso improprio su $[4, +\infty[$. $\blacksquare$

16. Dite se i seguenti integrali impropri sono convergenti

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg \frac{1}{x}}{x \log^2(x^2+x)} dx$ (Si) ;

$f(x)$

$f(x) :]0, \frac{1}{2}] \rightarrow]0, +\infty[$ continua,

$f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x \log^2 x}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Poiché $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \log^2 x} dx$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato è convergente. $\square$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\log(2x+e^x)}} dx$ (Si) ;

$f(x)$

$f(x) :]0, 1] \rightarrow]0, +\infty[$ continua,

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato è convergente. $\square$

(c) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} (1-x^2)} dx$ (No) ;

$f(x)$

$f(x) :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ continua

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, quindi f è Riemann integrabile in un intorno destro di 0.

Oss. poi che $f(x) \sim \frac{\sin 1}{2(1-x)}$ per $x \rightarrow 1^-$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ è divergente, per il criterio del confronto asintotico risulta che l'integrale dato non è convergente. $\square$

(d) $\int_1^2 \frac{(e^{-x+2}-1) \sin \sqrt{x}}{\sqrt[3]{(2-x)^4}} dx$ (Si) ;

$f(x)$

$f(x) : [1, 2[\rightarrow]0, +\infty[$ continua

$f(x) \sim \frac{(-x+2) \sin \sqrt{2}}{\sqrt[3]{(2-x)^4}} = \frac{\sin \sqrt{2}}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} \text{ per } x \rightarrow 2^-$

Poiché $\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} dx$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato è convergente. $\blacksquare$

$$17. F(x) = \int_1^x \frac{|t+1|}{\sqrt[3]{t}} dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Il dominio di F è un intervallo chiuso e limitato. **Falsa**:

$f(t) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Poiché $f(t)$ è integrabile ^(in senso improprio) in un intorno sinistro (destro) di 0;

segue che $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$, e si può prolungare $F(x)$ in

$x=0$. Rimulta $\text{dom } F = \mathbb{R}$. $\square$

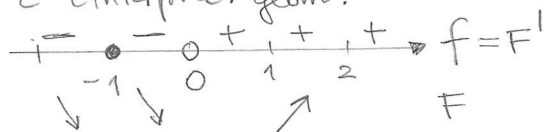
(b) F ha un pt. critico in $x=-1$. **Vera**:

f è continua in $x=-1$. Dal TFC segue che $F'(-1) = f(-1) = 0$. $\square$

(c) La funzione F ha un pt. di minimo assoluto in $x=0$. **Vera**:

(segue anche semplic. dal segno di f e l'interpret. geom.

della funz. integranda).

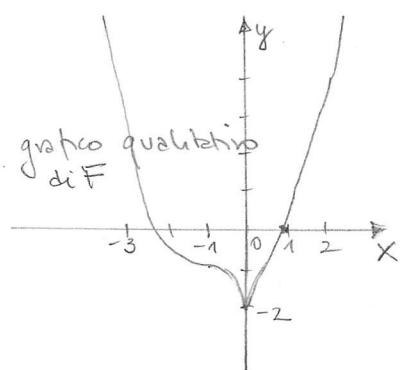


Oss. che $F(0) = \int_1^0 \frac{(t+1)}{\sqrt[3]{t}} dt$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 (t^{2/3} + t^{-1/3}) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} - \int_{\delta}^1 (t^{2/3} + t^{-1/3}) dt$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} - \left[\frac{3}{5} t^{5/3} + \frac{3}{2} t^{2/3} \right]_{\delta}^1 =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(- \left[\frac{3}{5} + \frac{3}{2} \right] + \left[\frac{3}{5} \delta^{5/3} + \frac{3}{2} \delta^{2/3} \right] \right) = -\frac{21}{10}$$



(d) Il punto $(0, F(0))$ è un pt. angoloso. **Falsa**:

Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x+1|}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{\sqrt[3]{x}} = -\infty;$$

risulta che in $x=0$ il grafico di F presenta una cuspide. $\blacksquare$