1 28 novembre

Esercizio 39
Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[a,b]$. Dimostrare che, se esiste una funzione $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ allora g è Riemann-integrabile su $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

Hint: definire $h(x) = f(x) - g(x)$ e dimostrare che è Riemann-integrabile su $[a,b]$ con la caratterizzazione; poi, provare che $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = 0$

Esercizio 40
Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e non-negativa su $[a,b]$. Dimostrare che, se $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$, allora $f(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$.

Hint: supporre per assurdo che esista un $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) > 0$, e poi stimare $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ su opportuni intervalli (usare il teorema della permanenza del segno) per trovare la contraddizione

Esercizio 41
Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ di $g(x) = \int_{x^3}^{x^2} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.
Inoltre, determinare (se esistono!) gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$.

Hint: usare il risultato visto in classe per $\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right)'$

Esercizio 42
Data la funzione $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t)\ \mathrm{d}t$, trovare i suoi punti critici e poi calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-x^2}{x^6}$.

Esercizio 43
Data la funzione $f(t) = \cos(2t)$, fare uno studio qualitativo (segno, derivate, concavità,...) sull'intervallo $[0,\pi]$ di $F_{\frac{\pi}{4}}(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 44

Calcola le primitive delle seguenti funzioni:

1. $\int \frac{3-4x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} \, \mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt[3]{2x+1} \, \mathrm{d}x$
4. $\int 3xe^{x^2} \, \mathrm{d}x$
5. $\int 6x \sin(-3x^2-2) \, \mathrm{d}x$

Esercizio 45

Calcola $\int x \cos(x) \, \mathrm{d}x$ (con la formula di integrazione per parti)