1 Lunedì 17/10

Esercizio 20
Usando la definizione, dimostrare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$
2. $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$
3. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1} = -4$

1) dobbiamo dimostrare che $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\sin(x)| < \epsilon$
Siccome $|\sin(x)| \leq |x|$, basta scegliere $\delta_\epsilon = \epsilon$: infatti $|\sin(x)| \leq |x| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) dobbiamo dimostrare che $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\cos(x) - 1| < \epsilon$
Siccome $|cos(x) - 1| = 1 - \cos(x) = 2\big(\sin(\frac{x}{2})\big)^2 \in [0, 2]$, abbiamo

$$-\epsilon < 0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2\Big|\sin(\frac{x}{2})\Big|^2 \leq 2\left(\frac{|x|}{2}\right)^2 = \frac{|x|^2}{2}$$

Se scegliamo $\delta_\epsilon = \sqrt{2\epsilon},\ \ 0 \leq 1 - \cos(x) < \frac{2\epsilon}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) dobbiamo dimostrare che $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon :\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ |x+1| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\frac{x^2-2x-3}{x+1} + 4| < \epsilon$

$$\left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} + 4\right| = \left|\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}\right| = |x + 1| < \delta_\epsilon$$

E' sufficiente allora scegliere $\delta_\epsilon = \epsilon$

Esercizio 21

Calcola

1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$ per ogni $a > 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\beta}$, con $\beta \in \mathbb{R}$ (extra, non fatto in classe)

1) analizziamo separatamente i tre casi $a = 1$ (banale), $a > 1$ e $0 < a < 1$. Quando $a > 1$, notiamo che $\sqrt[n]{a} = 1 + k_n$ ed applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli e il teorema del confronto. Quando $0 < a < 1$, consideriamo $\frac{1}{a} > 1$ e ripetiamo i passaggi del caso precedente

2) poniamo $b_n = \sqrt{\sqrt[n]{n}}$. Per $n > 1$ anche $b_n > 1$ e dunque esiste un k_n tale che $b_n = 1 + k_n$. Dopo aver applicato la disuguaglianza di Bernoulli a b_n^n, si deduce dal teorema del confronto che $k_n \longrightarrow 0$

3) dal punto precedente abbiamo il caso $\beta = 1$. Per concludere l'esercizio, considerare in successione i casi $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{Z}_{<0}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ (i.e., $\lfloor\beta\rfloor \leq \beta \leq \lfloor\beta\rfloor + 1$)

Esercizio 22 (gerarchia degli infiniti)

Calcola

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$ con $a > 0$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a > 1$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_b(n))^\beta}{n^\alpha}$ con $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $b > 1$

e verifica che $(\log_b(n))^\beta << n^\alpha << a^n << n! << n^n$ per $n \to +\infty$

1) è sufficiente notare che $\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n} \leq 1^{n-1}\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

2) se $0 < a < 1$, dal teorema del confronto si deduce immediatamente che il limite è 0.
Nel caso $a > 1$, notiamo che $\frac{a}{n} \longrightarrow 0$ e quindi esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ per ogni $n > m$. Allora abbiamo

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n}\frac{a}{n-1}\cdots\frac{a}{m}\cdots\frac{a}{1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\frac{a^m}{m!}$$

m è un numero fissato, dunque $\frac{a^m}{m!}$ è una costante e, per il teorema del confronto, abbiamo che $\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$

3) il caso $\beta \leq 0$ è banale.
Consideriamo $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Allora, posto $b = a^{\frac{1}{\beta}} > 1$ abbiamo

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \left(\frac{n}{b^n}\right)^\beta$$

Applicando la disuguagianza di Bernoulli a $\sqrt{b} = 1 + k_n$, troviamo che $\frac{n}{b^n} < \frac{1}{nk_n^2}$ e possiamo concludere col teorema del confronto.
Infine, se $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, basta osservare che $\lfloor\beta\rfloor \leq \beta \leq \lfloor\beta\rfloor + 1$ e usare nuovamente il teorema del confronto

4) se poniamo $a_n = \log_b n$, possiamo scrivere

$$\frac{(\log_b(n))^\beta}{n^\alpha} = \frac{a_n^\beta}{n^\alpha} = \frac{a_n^\beta}{(b^{\log_b n})^\alpha} = \frac{a_n^\beta}{(b^\alpha)^{a_n}}$$

Siccome la successione $(a_n)_n$ tende a $+\infty$, possiamo usare il risultato del punto precedente e il teorema del limite delle funzioni composte per concludere che $\frac{(\log_b(n))^\beta}{n^\alpha} \longrightarrow 0$

Esercizio 23
Calcola i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^5+7x^4-1}{2x^5+7}$ $[2]$

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}$ $\left[0\right]$

4. $\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sin x}{1+x^2}$ $\left[0\right]$

6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1+x}\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-e^x}$ $\left[0\right]$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{e^x-e}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

9. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(\ln x\right)}{\ln(x)}$ $\left[+\infty\right]$