1 21 novembre

Esercizio 36
Studia il carattere delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
6. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(n)-1}{n(n+1)^2}$
8. $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{n+1}{n-3}\right)\right)^n$

Hint: per la 6° e 7° serie, valutare/stimare subito il valore del coseno; per l'ultima serie, ottenere un confronto col carattere di una serie geometrica convergente

Esercizio 37
Studia il carattere delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n+1}$ con $\alpha \geq 0$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n+3n}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n+2^n}{\alpha^n+4^n}$ con $\alpha \geq 0$

Hint: valutare il carattere del termine n-esimo della serie al variare del parametro e poi applicare i vari risultati sulle serie (condizione necessaria per la convergenza, teorema del confronto, ...)

Esercizio 38

Studia il carattere delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} (x+1)^n$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

Attenzione: dopo aver calcolato il raggio di convergenza, attenzione ad "applicarlo" al giusto intervallo di $x \in \mathbb{R}$

Esercizio extra con Taylor (svolto)
Al variare di $\alpha > 0$, valutare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4}$$

Il limite ha una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, quindi usiamo le serie di Taylor del logaritmo e dell'esponenziale fino all'ordine necessario per non avere più la forma indeterminata:

- $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
  (sviluppato fino al terzo ordine perché, avendo il quadrato dell'esponenziale nel limite, occorre tener conto anche del fattore "$2 \cdot x \cdot \frac{x^3}{6}$")

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4} &= \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + x^\alpha}{x^4} \\
&= \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + x^\alpha}{x^4} \\
&= \frac{-\frac{13}{12}x^4 - x^3 + x^\alpha + o(x^4)}{x^4} \\
&= -\frac{13}{12} + \frac{x^\alpha - x^3}{x^4} + \frac{o(x^4)}{x^4}
\end{aligned}$$

Al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha - x^3}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ 0 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$. Allora,

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{13}{12} + \frac{x^\alpha - x^3}{x^4} + \frac{o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ -\frac{13}{12} & \text{se } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$