

A) 1. (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $e^{|x+y|} \leq e^{|x|} e^{|y|}$. Vera

Infatti, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare: vedi Foglio Es-2-20-24-09, Es. 2.14 i))

Dalla crescenza di e^x e le "proprietà delle potenze" segue
 $e^{|x+y|} \leq e^{|x|+|y|} = e^{|x|} e^{|y|}$. □

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $\frac{e^{|y|}}{e^{|x|}} \leq e^{|x-y|}$. Vera

Infatti, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $||y| - |x|| \leq |x-y|$ (segue dalla disug. triangolare: vedi Foglio Es-2-20-24-09, Es. 2.14 iii))
e quindi

$$|y| - |x| \leq |x-y|$$

Dalla crescenza di e^x e le "proprietà delle potenze" segue

$$\frac{e^{|y|}}{e^{|x|}} = e^{|y|-|x|} \leq e^{|x-y|}$$

2. $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - (1 + x)^{\frac{1}{2}}}{\sin 3x - 3 \sin x}$ 0/0

Ricordiamo che

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} \sin 3x - 3 \sin x &= \cancel{3x} - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - \cancel{3x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= -4x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sviluppiamo allora i termini al numeratore almeno fino al 3° ordine.

Ricordiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3 + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0$$

Posto $t = \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha

In alternativa:

$$\begin{aligned} &= \frac{(-4x^3 + o(x^3))(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})}{(\sin 3x - 3 \sin x)(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \frac{(-4x^3 + o(x^3))}{(\sin 3x - 3 \sin x)} \cdot \frac{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \frac{(-4x^3 + o(x^3))}{(-4x^3 + o(x^3))} \cdot \frac{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+x})} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + \sin x)^{\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{8} (\sin x)^2 + \frac{1}{16} (\sin x)^3 + o((\sin x)^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Risulta allora per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 (1 + \sin x)^{\frac{3}{2}} - (1 + x)^{\frac{3}{2}} &= \cancel{1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3)} \\
 &\quad - \cancel{1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{12} x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}} - (1 + x)^{\frac{3}{2}}}{\sin 3x - 3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-4 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{48}}}
 \end{aligned}$$

3. $a, b \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} x + \int_0^x (t \cos 2\pi t) dt & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Dobbiamo determinare innanzitutto $a, b \in \mathbb{R}$ tale che f sia continua in $x = 1$: f è continua in $x = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$,

$$\begin{aligned}
 \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\sin \frac{\pi}{2} x + \int_0^x (t \cos 2\pi t) dt \right] = \\
 &= 1 + \int_0^1 (t \cos 2\pi t) dt
 \end{aligned}$$

$$\iff a + b = 1 \quad \text{poich }$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (t \cos 2\pi t) dt &= t \frac{\sin 2\pi t}{2\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin 2\pi t}{2\pi} dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} [\cos 2\pi t]_0^1 = 0.
 \end{aligned}$$

Allora

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 - a & \text{se } x < 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} x + \int_0^x (t \cos 2\pi t) dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{  continua in } x = 1.$$

Notiamo ora che

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{se } x < 1 \\ \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x + x \cos 2\pi x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Perché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax) = 2a$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x + x \cos 2\pi x \right) = 1,$$

dal corollario di Lagrange si ha $f'_-(1) = 2a$ e $f'_+(1) = 1$. Quindi f è derivabile in $x=1 \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Quindi la risposta al quesito è $a=\frac{1}{2}$ e $b=\frac{1}{2}$. ■

4. $f(x) = \int_x^{2x-1} (e^{-t^2} + 1) dt$.

Oss. che $f(1) = \int_1^1 (e^{-t^2} + 1) dt = 0$. Dal TFC (generalizzato) segue

$$f'(x) = \left(\int_x^{2x-1} (e^{-t^2} + 1) dt \right)' = (e^{-(2x-1)^2} + 1) \cdot 2 - (e^{-x^2} + 1) \cdot 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$f''(x) = -2 \cdot 2(2x-1) \cdot 2 e^{-(2x-1)^2} + 2x e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare,

$$f'(1) = (e^{-1} + 1) \cdot 2 - (e^{-1} + 1) = e^{-1} + 1$$

$$f''(1) = -8e^{-1} + 2e^{-1} = -6e^{-1}.$$

Perché

$$P_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2,$$

si ha allora

$$\underline{\underline{P_{2,1}(x) = (e^{-1} + 1)(x-1) - 3e^{-1}(x-1)^2.}} \quad \text{■}$$

5. Sia $f(x) = |x|(2 - \cos x)$.

(a) $x=0$ è pt. di minimo assoluto di f . (Vera)

Infatti $f(x) = |x|(2 - \cos x) \geq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Risulta $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. □

(b) f non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$. (Falsa)

Infatti, $f(x) \geq |x|$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$. Dal criterio del confronto

(dei due carabinieri) segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. □

(c) $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-2k\pi, 2k\pi]$. Falsa

Infatti, $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ si ha che $0 \in [-2k\pi, 2k\pi]$ e f non è derivabile in $x=0$. Basta oss. che $f(x) \sim |x|$ per $x \rightarrow 0$, ma possiamo anche semplicemente oss. che

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-h)(2 - \cosh h)}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(2 - \cosh h)}{h} = 1.$$

(d) Per ogni $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ si ha $\int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f(x) dx = \int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f^2(x) dx$. Vera

Basta oss. che $[-2k\pi, 2k\pi]$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine e $xf(x)$ e $xf^2(x)$ funzioni dispari. Quindi

$$\int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f(x) dx = 0 = \int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f^2(x) dx.$$

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, $g(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) f ha un minimo assoluto su $\mathbb{R}$. No

Basta prendere $f(x) = e^x$ su $\mathbb{R}$. □

(b) Se f è positiva, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. No

Basta prendere $f(x) = e^{-x}$ su $\mathbb{R}$: f è convessa, positiva e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $g \circ f$ è convessa. No. □

Considerando semplicemente $g(x) = -x$, risulta

$(g \circ f)(x) = -f(x)$ e mi ha che la funzione $g \circ f$ è concava.

[Anzi se $f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$ (f è sia convessa che concava) si ha

che $(g \circ f)(x) = (ma)x + (aq+b)$ è convessa (e concava), ma in generale questo non è vero]. $\square$

(d) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $f \circ g$ è convessa. (Si)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$; allora

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &= f(a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b) = f(\lambda ax + (1-\lambda)ay + b) \\ &= f(\lambda ax + (1-\lambda)ay + \lambda b + (1-\lambda)b) = f(\lambda(ax+b) + (1-\lambda)(ay+b)) \\ &\leq \lambda f(ax+b) + (1-\lambda)f(ay+b) \\ &\quad \uparrow \text{f convessa} \\ &= \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)) = \lambda(f \circ g)(x) + (1-\lambda)(f \circ g)(y). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$ segue la tesi. $\blacksquare$

7. (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! \cdot 2^n}{n^{2n}} \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n}$

Abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)! \cdot 2^n}$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot 2^n \cdot 2}{(n+1)^{2n} (n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)! \cdot 2^n} = \frac{8 \cancel{(2n)!}^1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cancel{n^2}^1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

$\downarrow 1$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8}{e^2} > 1.$$

Allora

(a) la serie in (i) è convergente. (No)

Dal criterio del rapporto per serie a termini positivi segue che la serie in (i) è divergente positivamente. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \right) \log \frac{n^2}{n+2}$ $a_n > 0 \quad \forall n \neq 2$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n}$ $a_2 = 0$

Oss. che $\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \log \frac{n^2}{n+2} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \log n$ per $n \rightarrow +\infty$.

$$\left(\log \frac{n^2}{n+2} = \log \left(\frac{n^2-4+4}{n+2} \right) = \log \left(n-2 + \frac{4}{n+2} \right) \sim \log n \right)_{n \rightarrow +\infty}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < +\infty \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ se } \alpha > 1$, abbiamo che $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^{5/2}}$ è convergente e quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

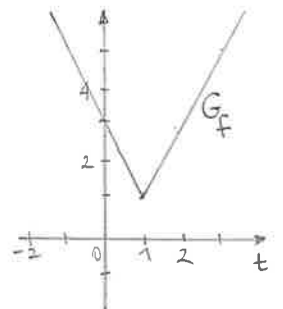
Allora

(b) la serie in (ii) è convergente (Si).

8. Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x (2|t-1|+1) dt.$$

Oss. che $f(t) = 2|t-1|+1 = \begin{cases} -2t+3 & \text{se } t < 1 \\ 2t-1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$



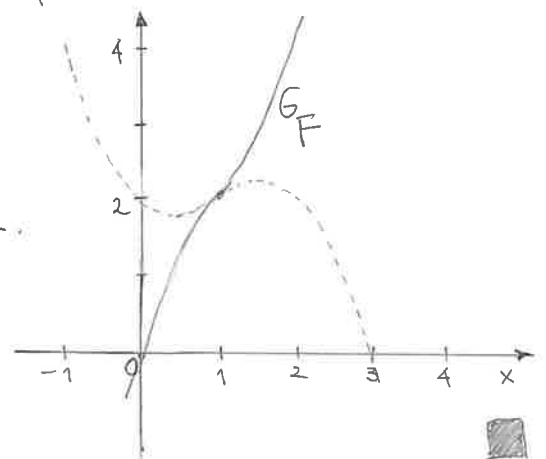
Risulta

• per $x < 1$ $F(x) = \int_0^x (-2t+3) dt = \left[-t^2+3t \right]_0^x = -x^2+3x;$

• per $x \geq 1$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 (-2t+3) dt + \int_1^x (2t-1) dt$
 $= \left[-t^2+3t \right]_0^1 + \left[t^2-t \right]_1^x = (-1+3) + (x^2-x) - (1-1)$
 $= x^2-x+2.$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} -x^2+3x & \text{se } x < 1 \\ x^2-x+2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



Nota: $-x^2+3x = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

$x^2-x+2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

9. Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2+8\alpha} (\arctg(x-1)^2)^\alpha}{\sqrt[3]{x^3-1}} dx$$

$f(x)$

Abbiamo $f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e positiva. Oss. che

$$\sqrt[3]{x^3-1} = \sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}. \text{ Risulta,}$$

per $x \rightarrow 1^+$ $f(x) \sim \frac{(x-1)^{2\alpha}}{\sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3} (x-1)^{\frac{1}{3}-2\alpha}}.$

Poiché $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}-2\alpha}} dx < +\infty \iff \frac{1}{3}-2\alpha < 1 \iff 2\alpha > -\frac{2}{3}$

$\iff \alpha > -\frac{1}{3}$,
dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_1^2 f(x) dx$ è convergente se e solo se $\alpha > -\frac{1}{3}$;

per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{x^{2+8\alpha} (\frac{\pi}{2})^\alpha}{x} = \frac{(\frac{\pi}{2})^\alpha}{x^{-1-8\alpha}}.$

Poiché $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{-1-8\alpha}} dx < +\infty \iff -1-8\alpha > 1 \iff 8\alpha < -2$
 $\iff \alpha < -\frac{1}{4},$

dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ è convergente se e solo se $\alpha < -\frac{1}{4}$.

Ne segue che $\underline{I_\alpha =]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}[}$.

10. (a) Determinate l'integrale generale dell'eq. differenziale

$$(*) \quad 2y'' + 3y' - 2y = e^{\frac{1}{2}x}.$$

L'eq. caratteristica dell'eq. diff. omogenea associata a (*) è

$$2z^2 + 3z - 2 = 0, \text{ che ha come soluzioni}$$

$$z_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

ossia $z_1 = -2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea associata a (*) è dunque

$$y_{\text{om}}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\xi = \frac{1}{2} + i0$ è soluzione dell'eq. caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare di (*) della forma $\bar{y}(x) = x \bar{a} e^{\frac{1}{2}x}$ con $\bar{a} \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione di (*). Abbiamo

$$\bar{y}'(x) = \bar{a} e^{\frac{1}{2}x} + x \frac{\bar{a}}{2} e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\bar{y}''(x) = \frac{\bar{a}}{2} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{\bar{a}}{2} e^{\frac{1}{2}x} + x \frac{\bar{a}}{4} e^{\frac{1}{2}x}.$$

$\bar{y}$ sarà dunque soluzione di (*) $\Leftrightarrow$

$$2\bar{a} + \frac{x\bar{a}}{2} + 3\bar{a} + 3\frac{x\bar{a}}{2} - 2\frac{x\bar{a}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5\bar{a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \frac{1}{5}.$$

Possiamo concludere che l'integrale generale di (*) è dato da

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{x}{5} e^{\frac{1}{2}x}} \quad \underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}} \quad \square$$

(b) Le soluzioni dell'eq. (*) soddisfanno le condizioni

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} c_1 e^{-2x} = -\infty \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 < 0. \end{cases}$$

Le soluzioni ricercate sono dunque della forma

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-2x} - c_1 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{x}{5} e^{\frac{1}{2}x}}, \quad \underline{c_1 \in \mathbb{R}_{<0}}. \quad \blacksquare$$

11. (a) Abbiamo

$$\begin{cases} (\bar{w} - i) \bar{z}^2 + 2\bar{z} = 0 \\ z(z - w) = 3. \end{cases}$$

Dalla 2^a eq. vediamo subito che $z = 0$, e quindi $\bar{z} = 0$, non dà soluzioni del sistema e quindi possiamo dividere la prima eq. per $\bar{z}$ ottenendo

$$(\bar{w} - i) \bar{z} + 2 = 0, \text{ ossia } \bar{w} \bar{z} - i \bar{z} + 2 = 0,$$

e quindi

$$\bar{w} = \frac{-2 + i \bar{z}}{\bar{z}} = i - \frac{2}{\bar{z}}$$

e passando al coniugato $w = -i - \frac{2}{z}$.

Sostituendo quest' espressione nella seconda eq., questa diventa

$$z^2 - z\left(i - \frac{2}{z}\right) = 3,$$

Cioè $z^2 + zi + 2 = 3$, ossia $z^2 + zi - 1 = 0$.

Quest'ultima eq. è un'eq. di secondo grado a coefficienti complessi, le cui soluzioni sono

$$z_{1/2} = \frac{-i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \text{ ossia } \begin{cases} z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione $W = -\dot{\phi} - \frac{2}{Z}$ si ottiene

$$w_1 = -i - \frac{2}{|z_1|^2} \cdot \bar{z}_1 \underset{|z_1|=1}{=} -i - 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} - 2i$$

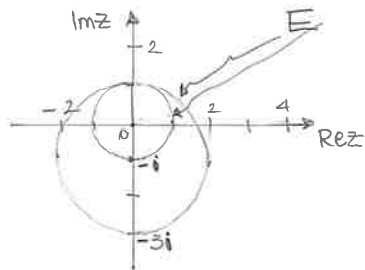
$$W_2 = -\dot{0} - \frac{2}{|z_2|^2} \bar{z}_2 \overset{|z_2|=1}{=} -\dot{0} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2} \right) = -\sqrt{3} - 2j$$

Il sistema ha pertanto le due soluzioni

$$\begin{aligned} \underline{(\hat{z}_1, \hat{w}_1)} &= \underline{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)} \\ \underline{(\hat{z}_2, \hat{w}_2)} &= \underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad E = \{z \in \mathbb{C} : (|z+i| - 2)(|z| - 1) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$



(c) Come abbiamo già oss. sopra $|z_1| = |z_2| = 1$ e quindi $z_i \in E \quad i=1,2$.

Oss. Inoltre che $\left. \begin{aligned} |w_1 + i| &= |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2 \\ |w_2 + i| &= |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_i \in E \quad i=1,2.$

Possiamo allora asserire che entrambe le coppie $(\hat{z}_1, \hat{w}_1), (\hat{z}_2, \hat{w}_2)$ soluzioni del sistema in (2) sono tali che $\hat{z}_i$ e $\hat{w}_i$ appartengono ad E .



12. $f(x) = e^{2x} - 2e^{-x} + 2$ su $\mathbb{R}$

(a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Sono asintoti obliqui

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} > 0$ su $\mathbb{R} \Rightarrow f$ è strett. crescente su $\mathbb{R}$

Sono pt. di critici, Sono pt. estremi per f su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{-x} = 2 \left[\frac{2e^{3x} - 1}{e^x} \right]$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\log 2}{3}$

$x = -\frac{\log 2}{3}$ pt. di flesso di f

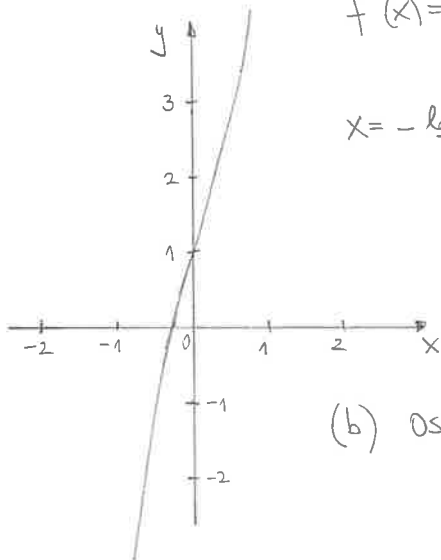
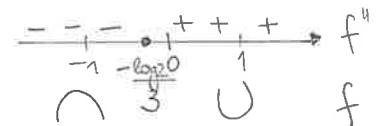


grafico qualitativo di f .

(b) Oss. che $\forall x \neq y$, dal teorema di Lagrange segue che $\exists \xi \in]x, y[$:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Otteniamo quanto in (*) se $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(\xi)| \geq c > 0$.

Quindi basta provare che $|f'(x)| \geq c \forall x \in \mathbb{R}$. Notiamo che $f'(x) > 0$;

inoltre

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

Quindi, per il teorema di Weierstrass generalizzato applicato alla funzione continua $f'(x)$ su $\mathbb{R}$ si ha che $\exists$ il minimo di f' su $\mathbb{R}$ (vedi Foglio Es_6_17-21-10, Es. 6, 12) e il valore minimo di f' su $\mathbb{R}$ sarà il più grande c per cui è verificata (*).

(c) $c = \min_{\mathbb{R}} f'(x) = f'\left(\frac{\log 2}{3}\right) = f'\left(\log \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2 \left(e^{2 \log \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} + e^{-\log \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \right)$
 $= 2 \left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 + \sqrt[3]{2} \right) =$
 $= 2 \cdot \frac{1 + 2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{6}{(\sqrt[3]{2})^2} \approx 3.8$

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$
 $x = x_0$ pt. critico
 per $f'(x)$; dal segno
 di f'' si ottiene anche che
 $x = x_0$ è in effetti pt. di minimo di f'