A

COGNOME E NOME: ____________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punti	2	2	$1\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	2	2	2	2
Punti ottenuti									

Esercizio	10	11	12	13	14	15	16		**Totale**
Punti	2	2	2	2	2	4	4		36
Punti ottenuti									

1. (2 punti) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa.
   (a) $\exists \overline{a} \in A : \forall a \in A, \quad a \leq \overline{a}$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____________________

   (b) Se $L = \sup A$, allora $\forall a \in A, \quad a < L$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____________________

   (c) Se $L = \sup A$, allora $\forall L' \in \mathbb{R} : L' < L, \quad \exists a \in A : \quad L' < a$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____________________

   (d) Se $L \in \mathbb{R}$ è tale che $\forall a \in A$ si ha $a < L + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora $L = \sup A$.
   ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____________________

2. (2 punti) Siano z_1 e z_2 le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 + (1-i)z = i.$$

   Se $\mathrm{Re} z_1 = 0$, allora $z_1 =$ ______ e $z_2 =$ ______.

3. ($1\frac{1}{2}$ punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ la successione definita da

$$a_n = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - 2^n}{e^{n \log \alpha}}.$$

   Determinate, al variare di α, il valore $L = \lim_{n \to +\infty} a_n$.
   Risulta che L è finito e diverso da zero e uguale a ____________ se $\alpha =$ ______.

4. (3 punti) Calcolate

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt[4]{n^4+k}}; \qquad L_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)^{2n}+(n+2)!}{(4n)^n - n^{2n}}.$$

Allora $L_1 =$ ______ e $L_2 =$ ______.

5. ($1\frac{1}{2}$ punti) Sia

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(x+\sin\frac{1}{2x}\right)-\log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2}+\frac{\log x}{x^3}}$$

Allora si ha $l =$ ______.

6. (2 punti) Sia

$$A = \left\{(-1)^n \frac{4}{\pi}\arctan(1+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\}.$$

Stabilite per ciascuna delle due affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'unico punto di accumulazione per A è 1. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) L'insieme A è costituito solo da punti isolati. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) Si ha $\inf A =$ __________. Esso è minimo? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(d) Si ha $\sup A =$ __________. Esso è massimo? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

7. (2 punti) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua con $f(0) = 0$ e $f(1) = -1$. Allora la funzione $g(x) = \alpha x^3 + \beta$ interseca necessariamente il grafico di f nell'intervallo $]0,1[$ per

◯ $\alpha = \frac{1}{2}\,, \quad \beta = \frac{1}{2}$ ◯ $\alpha = -1\,, \quad \beta = -1$ ◯ $\alpha > -\frac{3}{4}\,, \quad \beta = -\frac{1}{4}$ ◯ $\alpha = -\frac{3}{4}\,, \quad \beta = -\frac{1}{4}$

8. (2 punti) Sia $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$ e $g(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) $f^2(x) + g(x) \sim 5x^2$ per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) $f(x) = o(x\sqrt{x})$ per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(c) $g(x) - x^2 = o(1)$ per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

9. (2 punti) Sia $f(x) = \sin x^2 - \log(\cos x)$ per x in un intorno di 0.
   (a) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$
   esiste finito diverso da 0. Allora $\alpha =$ ______.
   (b) La parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0^+$, risulta ____________.

10. (2 punti) Siano α e β i due numeri reali positivi per i quali la funzione
$$f(x) = \begin{cases} (\beta+1)x^2 + e^x & \text{se } x \le 0 \\ \sin(\alpha x) + \beta\log(x+e) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
risulta derivabile in $x_0 = 0$. Allora $\alpha =$ ______ e $\beta =$ ______.

11. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \le -1 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin|x| & \text{se } -1 < x < 1 \\ e^{-x+1} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$
Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.
   (a) $x = -1$ è un punto di continuità e di massimo locale per f. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) $x = 0$ è un punto di minimo locale per f, ma non di minimo assoluto. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____

   La funzione $g = f|_{[1,+\infty[}$ è invertibile. Allora $g^{-1}(x) =$ ____________ per ogni $x \in I$, con $I =$ ______

12. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x + 1 + 2\arctan(x+1)$.
   (a) Dite perchè f ammette funzione inversa continua e derivabile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

   Perché? ____

   (b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}\left(\frac{1+x}{e^x + x^2}\right) =$ ______
   (c) Si ha $(f^{-1})'(0) =$ ______

13. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$
Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

(a) f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) f ha un asintoto verticale in $x = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) f non è derivabile in $x_0 = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(d) f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$, perchè f è costante in $x_0 = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

14. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) Se f è 1-periodica, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un punto critico per f in $\left]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right[$.
◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(b) Se f è dispari e $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| = 1$, allora $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO sui fogli a quadretti.

15. (4 punti) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} z\overline{w} = -i \\ |z|^2 w - 2\overline{z} = 3. \end{cases}$$

Scrivetele in forma algebrica e rappresentatele nel piano complesso.

16. (4 punti) Sia $(a_n)_n$ la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{1 + a_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $1 < a_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strettamente decrescente.

(c) Motivate l'esistenza del limite finito, per $n \to +\infty$, della successione $(a_n)_n$ e determinatelo.