

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
 CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
 Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

28 Novembre 2022

Esercizio 10.1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata tali che

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Dimostrare che g è Riemann integrabile e che $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Soluzione

Ricorda (linearità dell'integrale) $\varphi, \psi \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \psi dx$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $f(x_0) > g(x_0)$. Definiamo

$$h(x) := f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0) - g(x_0) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che h è Riemann integrabile. Equivalentemente dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{D} : S(\mathcal{D}, h) - s(\mathcal{D}, h) < \varepsilon$$

Fissiamo ε e definiamo

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ a, x_0 - \frac{\varepsilon}{4h(x_0)}, x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)}, b \right\}$$

Si ottiene che

$$s(\mathcal{D}_\varepsilon, h) = 0$$

infatti l'inf di h su qualsiasi intervallo è 0. Si ha inoltre che

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_\varepsilon, h) &= (x_1 - a) \underbrace{\sup_{[a, x_1]} h}_{f} + (x_2 - x_1)h(x_0) + (b - x_2) \underbrace{\sup_{[x_2, b]} h}_{f} = (x_1 - x_2)(h(x_0)) = \\ &= \left[x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)} - x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)} \right] h(x_0) = h(x_0) \frac{\varepsilon}{2h(x_0)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

h è quindi Riemann integrabile, di conseguenza per linearità $g = f - h$ è Riemann integrabile. Rimane ora da dimostrare che $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Dimostriamo equivalentemente che $\int_a^b h(x)dx = 0$. Osserviamo che le somme inferiori sono sempre 0, mentre le somme superiori risultano limitate dall'alto da $\frac{\varepsilon}{2}$, quindi facendo tendere ε a 0 si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 &= s(\mathcal{D}) \leq \int_a^b h(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &\implies \int_a^b h(x)dx = 0 \end{aligned}$$

QED

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 10.2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, allora $f(x) = 0$ ovunque.

Soluzione

Dimostrazione. Si procede per assurdo: supponiamo che $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) \neq 0$. In particolare $f(x_0) > 0$ per ipotesi. Per il teorema della permanenza del segno

$$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b] \wedge f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

. Per lo spezzamento si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0 - \delta} f(x)dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x)dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx$$

Perchè gli altri due integrali sono non negativi per ipotesi.

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx = \sup s(\mathcal{D}, f) \geq 2\delta \inf_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f = 2\delta \inf_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f > 0$$

Poiché $\inf_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f = \min_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f > 0$, ottengo una contraddizione. QED

Esercizio 10.3. Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$g(x) = \int_{x^3}^{-x^2} e^{-t^2} dt$$

E determinare per quali α reali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$$

Soluzione Definiamo

$$f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Da cui

$$g(x) = \int_{x^3}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = - \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = f(-x^2) - f(x^3)$$

Di conseguenza per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(-x^2)(-2x) - f'(x^3)(3x^2) = -2xe^{-x^4} - 3x^2e^{-x^6} \\ &\implies g'(0) = 0 \\ g''(x) &= -2e^{-x^4} + 8x^4e^{-x^4} - 6xe^{-x^6} + 18x^7e^{-x^6} \\ &\implies g''(x) = -2 \end{aligned}$$

Inoltre

$$g(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

Di conseguenza si ha

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2-\alpha} \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = 0 \iff \alpha < 2$$

Esercizio 10.4. Sia

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t)dt$$

(a) trovare i punti critici di $g(x)$;

(b) calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$$

Soluzione

(a) Sia $f(x) = \int_0^x \cos(2t)dt \implies g(x) = f(x^2)$. Di conseguenza $g'(x) = 2xf'(x) = 2x\cos(2x^2)$. x è punto critico \Leftrightarrow

$$\begin{cases} \text{ll} \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos(2x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

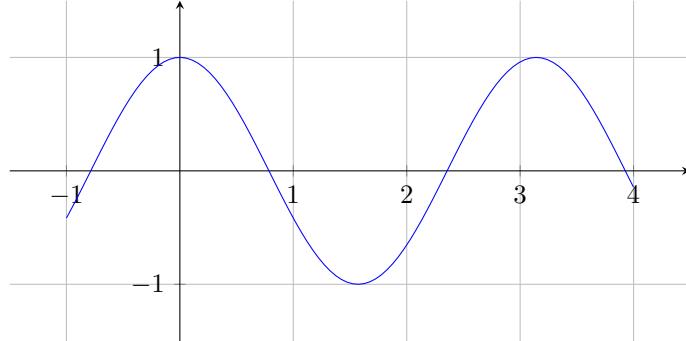
(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6} = \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\cos(2x^2) - 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x^2) - 1}{4x^4} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 10.5. Studiare qualitativamente

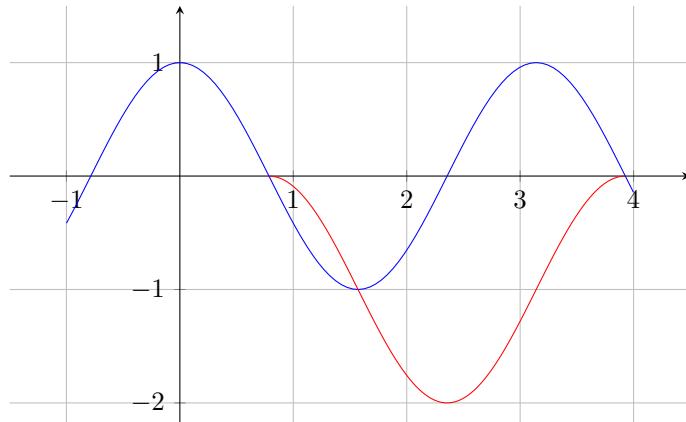
$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos(2t)dt$$

Soluzione Cominciamo rappresentando $\cos 2x$. Prima di tutto osserviamo che la funzione integrale ha



una radice in $x = \frac{\pi}{4}$. Inoltre, spostandosi verso destra, tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ l'area è negativa e *sempre più grande*.

Di conseguenza la funzione integrale sarà decrescente e concava. Tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$ l'area sarà negativa (funzione integrale decrescente) e *sempre più piccola* (convessa). Analogamente negli altri intervalli. Siamo così in grado di disegnare $F(x)$ in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$. Siccome la funzione è periodica siamo quindi in grado di disegnare F su tutto \mathbb{R} .



Esercizio 10.6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\text{a) } \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx$$

$$\text{c) } \int \sqrt[3]{2x+1} dx$$

$$\text{d) } \int 6x \sin(-3x^2 - 2) dx$$

$$\text{e) } \int 3xe^{x^2} dx$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int \frac{x}{1+x^2} dx = 3 \arctg x - 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= 3 \arctg x - 2 \int \log'(1+x^2) 2x dx = 3 \arctg x - 2 \int (\log(1+x^3))' dx = 3 \arctg x - 2 \log(1+x^2) + c \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx = \int \frac{1}{x} \operatorname{arcsen}'(\log(x)) dx = \int (\operatorname{arcsen}(\log x))' dx = \operatorname{arcsen} \log x + c$$

$$\text{c) } \int \sqrt[3]{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} (2x+1)^{\frac{4}{3}} \cdot 34 + c = \frac{8}{3} \sqrt[3]{(2x+1)^4} + c$$

$$\text{d) } \int 6x \sin(-3x^2 - 2) dx = \int (-6x)(-\sin(-3x^2 - 2)) dx = \cos(-3x^2 - 2) + c$$

$$\text{e) } \int 3xe^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + c$$

Primitive elementari

Funzione	Primitiva
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
e^x	e^x
$a^x \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arccos} x$