

Esercizi paradigma 13 : “...serie e integrali impropri ... l’eleganza e i misteri della funzione integrale ...”

(5 - 9 dicembre 2022)

13.1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^4} & \text{se } x \leq 1 \\ -e^{-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

- i) Determinate il punto di massimo $\bar{x} \in]0, +\infty[$ per F .
- ii) Provate che F non è derivabile in $\bar{x}$.
- iii) Studiate la concavità/convessità di F .
- iv) Provate che $F(x)$ ha asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.
- v) Tracciate un grafico qualitativo di F .

13.2) Sia data la funzione $F(x) = \int_1^x (t^2 - 1)e^{2t^2} dt$.

- a) Determinate il dominio di F , studiate la sua monotonia e la sua concavità/convessità.
- b) Dopo aver provato che F non ha né asintoti orizzontali, né asintoti obliqui per $x \rightarrow -\infty$ (analog. per $x \rightarrow +\infty$), tracciate un grafico qualitativo di F .

13.3) Studiate la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{\sqrt{|t-2|}} dt$

determinando il dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio e la monotonia. Tracciate poi un grafico qualitativo di F .

13.4) Studiate la funzione $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{2+t^4} dt$

determinando il dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio e la monotonia; tracciatene un grafico qualitativo.

13.5) Calcolate

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin x + \arctan x}{x^2} dx; \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin x - \arctan x}{x^4} dx.$$

13.6) i) Provate che $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$ per ogni $x > 0$.

ii) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x - \sin x + x^\alpha}{e^x - 1 - (1+x)\log(1+x)} dx.$$

13.7) Provate che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ è convergente.

13.8) Calcolate i seguenti limiti:

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} \quad \text{iii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=3^n}^{4^n} \frac{1}{k}.$$