Es 13

Es 1 Risolvere il seguente PDC.

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Oss. che ogni soluzione y sarà t.c. $y(x) \neq 0 \ \forall x$.

$y' = -\frac{x}{y} \iff y'y = -x$: VARIABILI SEPARABILI

$\Rightarrow \int y(x)\, y'(x)\, dx = \int -x\, dx$

$\Rightarrow t = y(x)$, $dt = y'(x)\, dx$

$$\int t\, dt = -\int x\, dx$$

$\Rightarrow \frac{t^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$, ovvero

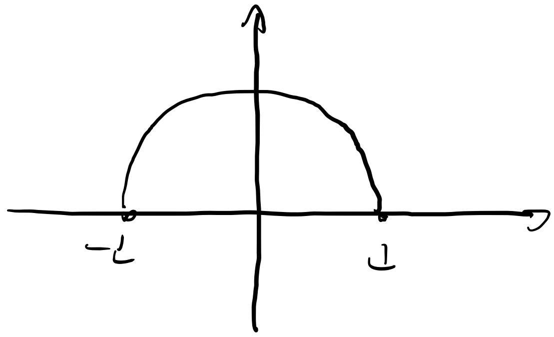
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Vogliamo $y(0) = 1$; dobbiamo quindi imporre che

$\frac{1}{2} = c$, da cui $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$,

ovvero $y^2 = -x^2 + 1$.

La soluzione è $y:(-1,1)\to\mathbb{R}$ t.c. $y(x)=\sqrt{1-x^2}$



Es 2 Det l'int. generale di

$$(x^2+1)y'+y^2=0$$

Oss. che $x^2+1\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Inoltre $y\equiv 0$ è soluzione.

Ogni altra soluzione, grazie al TDC, è $\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Dall'eq. otteniamo

$$\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{y'}{y^2}=-\arctan(x)+c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y}=-\arctan(x)+c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\arctan(x)+c}$$

Risolviamo il PDC

$$\begin{cases} (x^2+1)\,y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Imponiamo $1 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\arctan(x)+1}$$

Il dominio di

di y è $\mathbb{R} \setminus \{\tan 1\}$

Es 3 Trova l'IG di

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, y(x).$$

Il dominio sarà $\subseteq$ in $(-1,+\infty)$.

Come sopra, quali sono le soluz. costanti?

Solamente $y \equiv 0$. Come sopra ogni soluz non cost è $\neq 0 \;\forall x$.

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\log(|y(x)|) = 2\sqrt{x+1} + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x+1}+c} = e^{c}e^{2\sqrt{x+1}} = \overset{\overset{0}{\wedge}}{k}\,e^{2\sqrt{x+1}}$$

Oss che poiché $y \neq 0$. Allora o $y>0$ o $y<0$,

da cui $y(x) = k e^{2\sqrt{x+1}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Es 4 Trova IG di $y' = x y^2$.

Soluzioni costanti? $y' = 0 \iff x y^2 = 0 \ \forall x$.

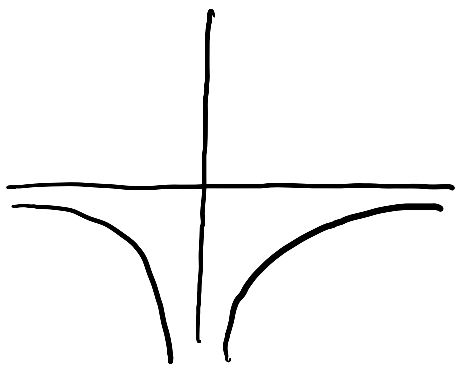
Solo $y \equiv 0$!. Sia y non costante.

$$\int \frac{y'}{y^2} = \int x$$

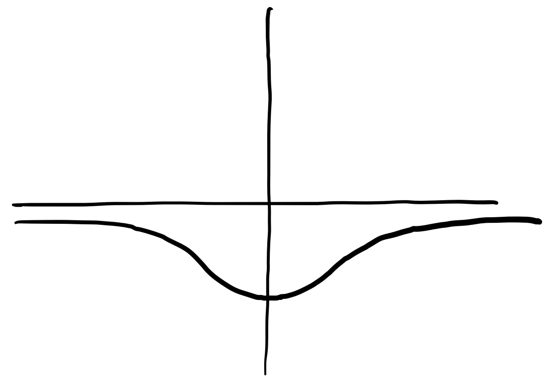
$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad \text{ovvero} \quad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

Rappr. grafica qualitativa.

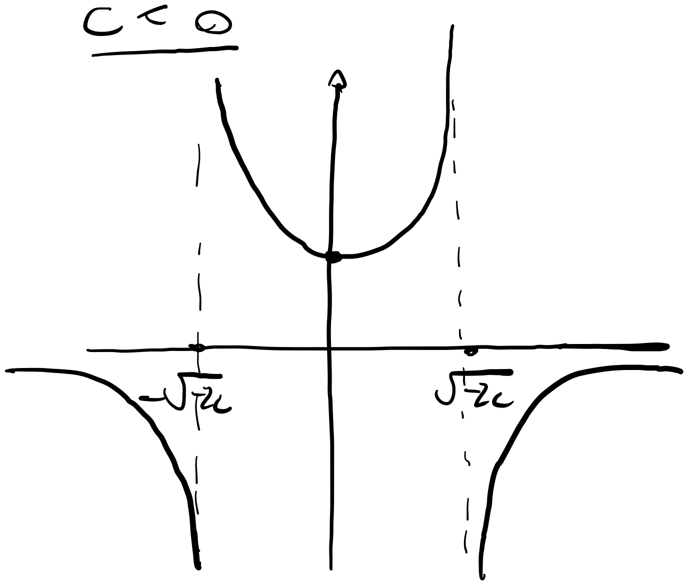
<u>$c = 0$</u>



<u>$c > 0$</u>



<u>$c < 0$</u>



Risolviamo i <u>PDC</u>

$$\begin{cases} \text{''} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{''} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$

$y(0) = -1 \Rightarrow c = 1 \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Es 5

Risolvere il seguente PDC

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Oss. che è lineare del primo ordine!

$y' = a(x) y + b(x)$, dove $a(x) \equiv 1$ e $b(x) \equiv 1$

MEMO $y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right)$,

dove $A(x) = \int a(x)$. Per noi $A(x) = x \Rightarrow$

$$y(x) = e^x \left(c + \int e^{-x} \right)$$

$$= e^x \left(c - e^{-x} \right)$$

$$= ce^x - 1. \quad y(0) = 0 \Leftrightarrow \underline{c = 1}$$

$\Rightarrow y(x) = e^x - 1, \; y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Es 6

Risolvere $\begin{cases} y' = \sin x \, y + \sin 2x \\ y(0) = -2 \end{cases}$

$a(x) = \sin x$, $b(x) = \sin 2x$

$\Rightarrow A(x) = -\cos x$

$$y(x) = e^{-\cos x}\left(c + \int \sin 2x \, e^{\cos x}\right)$$

Trovo una primitiva di $\sin 2x \, e^{\cos x}$

$$\int \sin 2x \, e^{\cos x} = 2\int \sin x \cos x \, e^{\cos x}$$

$\cos x = s$ $\quad -\sin x \, dx = ds$

$$= -2\int s e^{s} \, ds$$

$$= -2\left[s e^{s} - \int e^{s}\right] = -2se^{s} + 2e^{s}$$

$$= -2\cos x \, e^{\cos x} + 2e^{\cos x}$$

$$\Rightarrow y(x) = ce^{-\cos x} - 2\cos x + 2$$

$y(0) = -2 \Rightarrow -2 = ce^{-1}$ $\quad c = -2e$

Es 7 Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ risolvi

$$\begin{cases} y' = y^2 x \log x^2 & x \neq 0, \text{ma } 1 \in \text{Dom} \\ y(1) = \lambda & \Rightarrow \text{Dom}(y) \subseteq (0, +\infty) \end{cases}$$

Soluzioni costanti: $0 = \lambda^2 x \log x^2$.

Se $\lambda = 0 \Rightarrow y \equiv 0$.

Se $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ nessuna. Quindi assumiamo $\lambda \neq 0$.

e allora $y \neq 0 \ \forall x$.

$$\int \frac{y'}{y^2}\, dx = \int x \log x^2$$

$x^2 = s$
$ds = 2x\, dx$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\int \log s \, ds$$

$$\frac{1}{2}\int \log s = \frac{1}{2} s \log s - \frac{1}{2}\int 1 = \frac{1}{2} s \log s - \frac{1}{2} s$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 (\log x^2 - 1) + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{x^2(\log x^2 - 1) + 2c}$$

Imponiamo $y(1) = \lambda$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{-1+2c} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{1-2c}$$

$$\Rightarrow \lambda - 2c\lambda = 2 \Rightarrow 2c\lambda = \lambda - 2$$

$$c = \frac{\lambda - 2}{2\lambda}$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{2}{x^2(\log x^2 - 1) + \frac{\lambda - 2}{\lambda}}$$

<u>Dominio? (es)</u>

Es 8

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = \log(1+x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

LINEARE $\quad a(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2} \qquad b(x) = \log(1+x^2)$

Int generale:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx\right)$$

Trovo $A(x)$:

$$\int -\frac{2x}{1+x^2} = -\log(1+x^2)$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(c + \int \log(1+x^2)(1+x^2)\, dx\right)$$

Primitiva di $\log(1+x^2)(1+x^2)$

$$\int \log(1+x^2)(1+x^2) = \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4}{1+x^2}$$

$$\int \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4}{1+x^2} = 2\int \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x^4}{1+x^2}$$

$$= 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} - 2\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{1+x^2}} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x - 2\arctan x + \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\arctan(x)$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\arctan x + \frac{2}{9}x^3$$