Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

19 Settembre 2022

Esercizio 1.1. Dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
- $B = [0, 1[$
- $C = \mathbb{Q}$
- $D = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Determinare $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, B^C, $A \setminus B$,$A \triangle D$, $\mathcal{P}(D)$

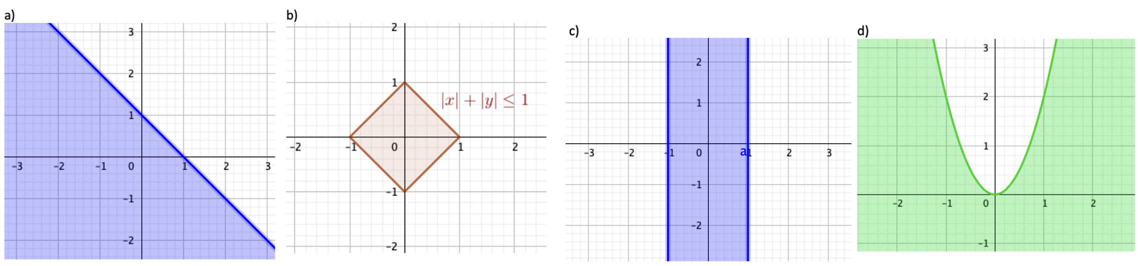
Soluzione Sia $A' = A \setminus \{1\}$

- $A \cap B = A'$
- $A \cap C = A$, infatti se P, R insiemi e $P \subseteq R$, allora $P \cap R = P$
- $A \cup B = [0, 1]$
- $B^C =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$
- $A \setminus B = \{x \in A \ e \ x \notin B\} = A \cap B^C = \{1\}$
- $A \triangle D = (A \setminus D) \cup (D \setminus A) = (A \cup D) \setminus (A \cap D) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n > 0\}$
- $\mathcal{P}(D) = \{\varnothing, \{0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{1\}, \{0, \frac{1}{2}\}, \{0, 1\}, \{\frac{1}{2}, 1\}, D\}$

Esercizio 1.2. Rappresentare in R^2 i seguenti insiemi:

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x^2\}$

Soluzione



Esercizio 1.3. Formalizzare e negare la seguente proprietà: "Esiste un numero naturale n tale che per ogni numero naturale z si ha che se z è diverso da n, allora z è minore di n". Verificare se tale proprietà è vera o falsa.

Soluzione $\exists n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N} : (z \neq \mathbb{N} \Rightarrow z < n) \quad (F)$
La negazione è $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} : (z \neq n \ e \ z \geq n) \quad (V)$ infatti basta fissare n e scegliere $z = n + 1$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 1.4. Data una proprietà $\mathcal{P}(x)$, formalizzare il fatto che esiste un unico x che realizza $\mathcal{P}$ senza utilizzare il simbolo $\exists!$.

Soluzione $\exists x : \mathcal{P}(x)$ *e* $\forall y, (y \neq x \Rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$

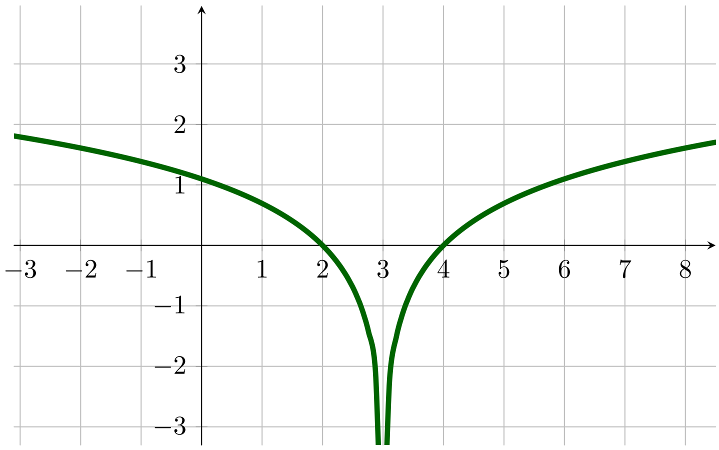
Esercizio 1.5. Negare e stabilire la veridicità della proprietà:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (y > x \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y)$$

Soluzione $\exists x, y \in \mathbb{R} : (y > x$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y)$ (V), infatti basta scegliere $x = 0$ e $y = 1$.

Esercizio 1.6. Rappresentare il grafico della funzione $f(x) = \ln(|x-3|)$, dopo averne determinato il dominio.

Soluzione Dominio: $|x-3| > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$



Esercizio 1.7. Rappresentare il grafico di $f_\alpha(x) = x^\alpha$, dopo averne determinato il dominio, con

$$\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}$$

. Discutere iniettività e suriettività di f_α.

Soluzione Se $\alpha \in \mathbb{N}$ *e* α pari si tratta di una funzione potenza di grado pari, quindi né iniettiva né suriettiva. Se α dispari la funzione è una potenza di grado dispari, quindi sia iniettiva che suriettiva.
Se $\alpha \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}$, con n pari, la funzione è una radice di indice pari, per cui è iniettiva ma non suriettiva. Se n è dispari si tratta di una radice di indice dispari, quindi di una funzione iniettiva e suriettiva.

Esercizio 1.8. Dimostrare che $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

non è iniettiva.

Dimostrazione. $f(x)$ è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, quindi:

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x - y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x - y = \frac{x-y}{xy}$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se $xy = 1$ oppure $x = y$, quindi non solo per $x = y$. Di conseguenza la funzione non è iniettiva. QED