Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

30 Settembre 2022

Esercizio 2.1. Verificare suriettività e iniettività delle seguenti funzioni

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x < 0 \end{cases}$

Soluzione

(a) Iniettività: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ oppure $\underbrace{xy = 1}_{\text{non iniettiva}}$

Suriettività: fissato un $y \in \mathbb{R}$ (codominio), dobbiamo verificare se esiste un $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che verfica $y = f(x)$.

$$y = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 1 = xy$$

Non ammette soluzioni per $y = 0$. La funzione non è suriettiva.

Lemma (dei cassetti)**.** *Siano A, B insiemi finiti tali che $|A| = |B|$ e $f : A \to B$, allora f è suriettiva se e solo se è iniettiva.*

(b) Iniettività:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{y-1}{1+y} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1+y-x-xy+y-1+xy-x}{(1+x)(1+y)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\frac{y-x}{(1+x)(1+y)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = x$$

da cui $f(x)$ è iniettiva.
Suriettività:

$$\frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow$$
$$1 - x = y(1+x) \Leftrightarrow$$
$$1 - x = y + xy \Leftrightarrow$$
$$1 - y = x + xy \Leftrightarrow$$
$$1 - y = x(1+y)$$

$$\text{Se } y \neq -1 \quad \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$
$$\text{Se } y = -1 \quad \Rightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Osservazione. *Se restringo il codominio la funzione è suriettiva, quindi è anche biiettiva, per cui ammette inversa:*

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

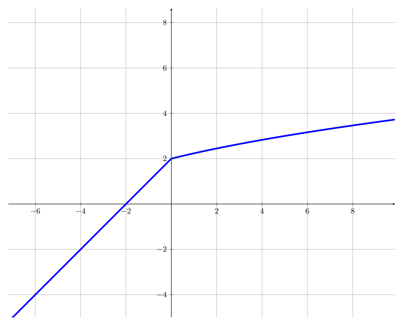
(c) Se $a = 0$, $f(x) = b$, ovvero una retta orizzontale, né iniettiva né suriettiva.
Se $a \neq 0$, $f(x) = b$, si ha una funzione biiettiva.

(d) Iniettività:

Osservazione. $\begin{array}{ll} f(z) < 2 & \textit{se } z < 0 \\ f(z) > 2 & \textit{se } z > 0 \end{array}$

Se $f(x) = f(y)$, si hanno tre casi:

- $x = y = 0$
- $x, y < 0 \Rightarrow x + 2 = y + 2 \Leftrightarrow x = y$
- $x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \Leftrightarrow x = y$



Da cui la funzione è iniettiva
Suriettività: sia $y \in \mathbb{R}$, se $y \leq 2$

$$x + 2 = y \Leftrightarrow x = \underbrace{y-2}_{\leq 0}$$

se $y > 2$

$$\sqrt{x+4} = y \Leftrightarrow x = \underbrace{y^2-4}_{>0}$$

Allora la funzione è suriettiva.

Esercizio 2.2. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1 \end{cases} \qquad g(x) = \log(|x|-1)$$

Calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione

$$f \circ g = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1}, & \text{se } \log(|x|-1) \geq -1 \\ \log^2(|x|-1), & \text{se } \log(|x|-1) < -1 \end{cases}$$

Risolvo la disequazione $\log(|x|-1) + 1 \geq -1$

$$|x| - 1 \geq \frac{1}{e}$$

$$x \leq -1 - \frac{1}{e} \text{ oppure } x \geq 1 + \frac{1}{e}$$

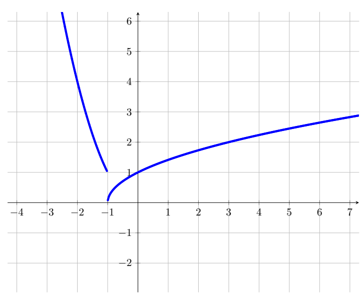
Da cui

$$f \circ g = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1}, & x \in \left]-\infty, -1-\frac{1}{e}\right] \cup \left[1+\frac{1}{e}, +\infty\right[\\ \log^2(|x|-1), & x \in \left]-1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right[\setminus [-1,1] \end{cases}$$

— — —

$$g \circ f = g(f(x)) = \log(|f(x)|-1) \overset{f(x)\geq 0}{=} \log(f(x)-1)$$

Bisogna imporre $|f(x)| - 1 > 0$, il che si ha quando $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,0]$, quindi $f : \mathbb{R} \setminus [-1,0] \to \mathbb{R}$.



Esercizio 2.3. Risolvere le seguenti equazioni

(a) $\sin(\arcsin(x+2)) = \dfrac{x}{3}$

(b) $\sin(\arcsin(x+2)) = 4x$

Soluzione

Osservazione. *Il seno non è una funzione iniettiva, anzi, è periodica. Di conseguenza non è invertibile. Bisogna restringere il dominio e il codominio. Di conseguenza bisogna ricordarsi di riportare questa restrizione anche nelle equazioni.*

$$-1 \leq x+2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$$

$$\sin(\arcsin(x+2)) = x+2$$

(a) $x+2 = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = -3 \in [-3,-1]$ Accetto.

(b) $x+2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \notin [-3,-1]$ Non accetto: $\nexists$ soluzine.

Esercizio 2.4. Determinare per quali valori in $\mathbb{N}$ vale la proprietà $\mathcal{P}(n) =$ "$n! \geq 5^{n-4}$"

Dimostrazione.

- Dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{\text{hp}}{\geq} (n+1)5^{n-4} = \frac{5}{5}(n+1)5^{n-4} = \frac{n+1}{5}5^{n-3} \underset{n\geq 4}{\geq} 5^{n-3}$$

- Proviamo il passo base: $\mathcal{P}(4) =$ "$4! = 24 \geq 5^0 = 1$".(V).
- Nel caso, proviamo anche i casi con $n < 4$.

QED

Esercizio 2.5. Sia $r_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}_{n \text{ volte}} \quad \forall n \geq 2$. Dimostrare che $r_n \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione.

- (Passo base) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (V)
- (Passo induttivo) Supponiamo che $r_n \notin \mathbb{Q}$ e dimostriamo che $r_{n+1} \notin \mathbb{Q}$. Si procede per assurdo. Supponiamo che $r_{n+1} \in \mathbb{Q}$, ovvero che $\exists a, b \in \mathbb{N}_{>0} : r_{n+1} = \frac{a}{b}$. Ci si accorge che $r_{n+1} = \sqrt{1+r_n}$, da cui $\sqrt{1+r_n} = \frac{a}{b}$, da cui $r_n = \frac{a^2-b^2}{a^2} \in \mathbb{Q}$, assurdo.

QED

Esercizio 2.6. Sia $\mathcal{P}(n) =$ "$n^3 + 5n$ è divisibile per 6". Dimostrare che vale $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Dimostrazione.

- (Passo base) $\mathcal{P}(1) =$ "6 è divisibile per 6"
- (Passo induttivo) Assumo che $\exists k \in \mathbb{N} : n^3 + 5^n = 6k$.

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = 6(n+1) + 3(n^2+n)$$

Osservazione. *Si nota facilmente che $n^2 + n = n(n+1)$ è il prodotto di un naturale per il suo successivo. Quindi $n^2 + n$ è sempre pari. Di conseguenza*

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = 6(n+1+\frac{n^2+n}{2})$$

QED