1 Lunedì 24/10

Esercizio 24
Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4(x)}{(1-\cos(x))^3}$ (forma indeterminata $\frac{0}{0}$)

2. $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n}\right)^{n^2}$ (forma indeterminata 1^∞)

3. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\ln(2x)}}$ (forma indeterminata 0^0)

4. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (forma indeterminata 1^∞)

1)
$$\frac{\sin^4(x)}{(1-\cos(x))^3} = \left(\frac{\sin^4(x)}{x^4}\right)\left(\frac{x^6}{(1-\cos(x))^3}\right)\frac{1}{x^2} \longrightarrow +\infty$$

2)
$$\left(\frac{1+n}{3+n}\right)^{n^2} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n}\right)^n = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^{3\frac{n}{3}}}\right)^n \longrightarrow 0$$

3)
$$\left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\ln(2x)}} = e^{\ln\left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\ln(2x)}}} = e^{\frac{1}{\ln(2x)}\ln(3x)^{-1}} = e^{-\frac{\ln(3)+\ln(x)}{\ln(2)+\ln(x)}} \longrightarrow e^{-1}$$

4)
$$\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left((\frac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{2^x+3^x-2}{2}\right)}{x}}$$

Moltiplicando e dividendo l'esponente per $\frac{2^x+3^x-2}{2}$, e ricordando il limite notevole $\lim_{x\to} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$ (per $a > 0$ e diverso da 1), otteniamo

$$\frac{2^x+3^x-2}{2x} = \frac{2^x-1}{2x} + \frac{3^x-1}{2x} \longrightarrow \frac{\ln(2)+\ln(3)}{2} = \ln(\sqrt{6})$$

Esercizio 25

Determinare, al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^2(2x)-\sin^2(2x)}{x^\gamma}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x$

1)

$$\frac{\tan^2(2x)-\sin^2(2x)}{x^\gamma} = \frac{\tan^2(2x)}{x^\gamma}\sin^2(2x) = \left(\frac{\tan(2x)}{2x}\right)^2\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\frac{16x^4}{x^\gamma}$$

Allora, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2(2x)-\sin^2(2x)}{x^\gamma} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > 4 \\ 16 & \text{se } \gamma = 4 \\ 0 & \text{se } \gamma < 4 \end{cases}$$

2)

$$\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x = \left(x^{\gamma-1}\frac{(1+\frac{3}{x^\gamma})}{(1+\frac{2}{x})}\right)^x = (x^{\gamma-1})^x\frac{(1+\frac{3}{x^\gamma})^x}{(1+\frac{2}{x})^x}$$

Allora, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > 1 \\ e & \text{se } \gamma = 1 \\ 0 & \text{se } \gamma < 1 \end{cases}$$

Esercizio 26

Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \sqrt{1+a_n} \end{cases}$$

Dimostrare che esiste il limite e calcolarlo

Hint: usando il principio di induzione, provare che la successione $(a_n)_n$ è crescente e superiormente limitata (e positiva!). Per il Teorema sul limite di successioni monotone, il limite esiste e $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; per trovare il valore di l, è sufficiente risolvere l'equazione $l = \sqrt{1+l}$

Esercizio 27
Stabilire se la seguente funzione è continua

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)} & \text{se } x > 0 \\ ke^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

E' sufficiente controllare che g sia continua in 0, perché le funzioni $\frac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)}$ e $ke^x - 2$ sono già continue nei rispettivi domini:

$$\begin{cases} \lim_{x\to0^-} & ke^x - 2 = k - 2 \\ \lim_{x\to0^+} & \frac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = 2 \end{cases}$$

Allora, la funzione g è continua su tutto $\mathbb{R}$ solo se $k = 4$, altrimenti è continua solo su $\mathbb{R} \setminus 0$

Esercizio 28
Dimostrare che $x^5 + 2x^3 - 2 = 0$ ha una e una sola soluzione reale.
Inoltre, trovare un intervallo di ampiezza massima pari a $\frac{1}{4}$ in cui x_0 sia contenuto.

$f(x) = x^5 + 2x^3 - 2 = 0$ è continua e monotona crescente perché somma di funzioni continue e monotone crescenti. Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Allora, esiste uno e un solo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
Per trovare l'intervallo della giusta ampiezza che contiene x_0 possiamo utilizzare il metodo di bisezione partendo, per esempio, dall'intervallo $[0, 1]$ ($f(0) = -2$ e $f(1) = 1$)

Esercizio 29
Dimostrare che $f(x) = x^3+x+1$ è biettiva su $\mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right)$

f è continua su $\mathbb{R}$ e monotona crescente perché somma di funzioni continue e monotone crescenti; in particolare, f è iniettiva e suriettiva (dalla crescenza e da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$).
f^{-1} è quindi continua per il Teorema sulla continuità dell'inversa e, per il Teorema sul limite delle funzioni composte, abbiamo:

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}(3) = 1$$