Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

24 Ottobre 2022

.

Esercizio 6.1. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3}$

(b) $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n}\right)^{n^2}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\log(2x)}}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Soluzione

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x^4}{x^4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^6}{(1-\cos x)^3}}_{\to \frac{1}{8}} \cdot \underbrace{\frac{x^4}{x^6}}_{\to +\infty} = +\infty$

(b) $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n}\right)^{n^2} = [1^\infty] = 0^+$

$$\left(\frac{1+n}{3+n}\right)^{n^2} = \left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right)^n \to \left(\frac{1}{e^2}\right)^n \to 0^+$$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to +\infty} e^{\log\left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{\log(2x)}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{-\log(3x)}{\log(2x)}} = \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{\log 3+\log x}{\log 2+\log x}} = e^{-1}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e^{\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{2}} = \sqrt{6}$ Infatti:

$$\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)} = e^{\overbrace{\frac{\log\left(1+\frac{2^x+3^x}{2}-1\right)}{\frac{2^x+3^x}{2}-1}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{\frac{2^x+3^x}{2}-1}{x}}^{\to \frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{2}}} \to e^{\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{2}}$$

poiché

$$\frac{\frac{2^x+3^x}{2}-1}{x} = \underbrace{\frac{2^x-1}{2x}}_{\to \frac{\log 2}{2}} + \underbrace{\frac{3^x-1}{2x}}_{\to \frac{\log 3}{2}} \to \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{2}$$

Esercizio 6.2. Calcolare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x$

Soluzione

(a) $\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}$

- Se $\gamma=0$, si ha $\lim_{x\to0^+}\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x=0$
- Se $\gamma<0$, si ha $\lim_{x\to0^+}x^{-\gamma}(\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x)=0$
- Se $\gamma>0$, si ha una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}=\frac{\operatorname{sen}^2 2x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)}{x^\gamma}=\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}\underbrace{\left(\frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x}\right)}_{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 2x\operatorname{tg}^2 2x}{x^\gamma}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\right)^2}_{\to1}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\right)^2}_{1\to}\cdot16x^{4-\gamma}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}=\begin{cases}0 & \text{se } \gamma<4\\ 16 & \text{se } \gamma=4\\ +\infty & \text{se } \gamma>4\end{cases}$$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x$

- Se $\gamma<1$ domina il denominatore, quindi $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x=0$
- Se $\gamma>1$ domina il numeratore, quindi $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x=+\infty$
- Se $\gamma=1$, si ha una forma di indecisione

$$\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^x=\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x=\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}\to\frac{e^3}{e^2}=e$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x=\begin{cases}0 & \text{se } \gamma<1\\ e & \text{se } \gamma=1\\ +\infty & \text{se } \gamma>1\end{cases}$$

Esercizio 6.3. Sia $(a_n)_n$ una successione definita per ricorrenza come

$$\begin{cases}a_1=1\\ a_n=\sqrt{1+a_n}\end{cases}$$

Dimostrare che $\exists\lim_{n\to+\infty}a_n$ finito e calcolarlo.

Soluzione Per dimostrare che esiste limite basta dimostrare che la successione è monotona. Prima di tutto facciamoci un'idea di quale possa essere la monotonia, magari calcolando i primi termini

$$a_1=1\quad a_2=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad a_1<a_2$$

Potrebbe essere crescente? Dimostriamolo per induzione:

- Passo base: $a_1\le a_2\quad\Leftarrow\quad a_1=1\quad a_2=\sqrt{2}$
- Passo induttivo: $a_{n+1}\ge a_n\quad\Rightarrow\quad a_{n+2}\ge a_{n+1}$

$$a_{n+2}\ge a_{n+1}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{1+a_{n+1}}\ge\sqrt{1+a_n}\quad\Leftrightarrow\quad\cancel{1}+a_{n+1}\ge\cancel{1}+a_n\quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}\ge a_n$$

La successione è effettivamente crescente, quindi per il teorema dell'esistenza del limite per successioni monotone, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$. Per dimostrare che il limite è finito, bisogna dimostrare che $(a_n)_n$ è limitata. Siccome è crescente, è limitata inferiormente. Dimostriamo che è limitata superiormente, ovvero che $\exists M : a_n \leq M \ \forall n$. Dato un $M \geq 1$ arbitrario, provare che

$$\forall n,\ a_n \leq M$$

. Usiamo il principio di induzione:

- Passo base: $(n = 1)\ \ a_1 \leq M \quad \Leftarrow \quad a_1 = 1 \leq M$
- Passo induttivo: $a_n \leq M \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq M$

$$a_{n+1} \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+a_n} \leq M \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a_n \leq M^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq M^2 - 1$$

  Ci basta quindi dimostrare che $a_n \leq M \quad \Rightarrow \quad a_n \leq M^2 - 1$. Basta scegliere un qualsiasi M tale che $M \leq M^2 - 1$, ad esempio $M = 2$.

Di conseguenza la successione è limitata superiormente e 2 è un suo maggiorante, per cui $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$ finito.

Osservazione. *L'insieme degli M che abbiamo appena individuato è un insieme dei maggioranti di $(a_n)_n$, ma non è detto che siano* tutti *i maggioranti.*

Calcoliamo quindi il limite. Se esiste (devo averlo dimostrato precedentemente!)

$$l = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \quad l = \sqrt{1+l} \quad \Longrightarrow \quad l^2 = 1 + l \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

Esercizio 6.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & \text{se } x > 0 \\ ke^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare k affinché f sia continua su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione La funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus 0$ in quanto i tratti sono ottenuti come somma, prodotto e composizione di funzioni continue. Studiamo quindi la continuità in $x = 0$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (ke^x - 2) = k - 2 = f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = 2$$

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \cdot x \cdot \frac{1}{x(\sqrt{x+1}-1)} \to \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{1}} = \sqrt{x+1} + 1 \to 2$$

Impongo che $\lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x)$:

$$k - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

Esercizio 6.5.

(a) Sia $f(x) = x^5 + 2x^3 - 2$. Dimostrare che $\exists! x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$ e determinare un intervallo $]a, b[$ con $b - a \leq \frac{1}{4}$ tale che $x_0 \in]a, b[$

(b) Sia $f(x) = x^3 + x + 1$ su $\mathbb{R}$. Dimostrare che f è invertibile e calcolare $\lim_{y\to\infty} f^{-1}\left(\dfrac{3y}{y+4}\right)$.

Soluzione

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, inoltre f è continua e $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, di conseguenza per il teorema dell'esistenza degli zeri, $\exists x_0\, f(x_0) = 0$. inoltre f è strettamente crescente in quanto somma di funzioni strettamente crescenti, quindi $\exists! x_0 : f(x_0) = 0$. Per trovare l'intervallo andiamo per tentativi:

$$f(0) = -2 \qquad f(1) = 1$$

Adesso calcolo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{4} - 2 = -\frac{55}{32}$. Siccome $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, lo zero si trova tra $\frac{1}{2}$ e 1. Calcolo quindi $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{941}{1024}$. L'intervallo che cercaviamo è quindi $\left]\frac{3}{4}, 1\right[$.

(b) È iniettiva perché è strettamente monotona in quanto somma di funzioni strettamente monotone. È inoltre suriettiva in quanto continua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (per il teorema dei valori intermedi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$). Di conseguenza è biiettiva e quindi invertibile su $\mathbb{R}$.

$$\lim_{y\to\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}(3) = 1$$

Infatti siccome f è continua e definita su un intervallo, anche la sua inversa è continua.