

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

07 Novembre 2022

Passaggi per lo studio di una funzione $g(x)$

1. Dominio naturale
2. Simmetrie (pari/dispari)
3. Segno di $g(x)$
4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti
5. Continuità
6. Derivabilità
7. Punti critici e segno di $g'(x)$
8. Convessità e derivata seconda
9. Esistenza di massimo e minimo globali da ricercare tra
 - punti critici
 - punti di non derivabilità
 - estremi del dominio

Esercizio 7.1. Studiare la funzione $g(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, calcolare inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $P(2, g(2))$. Si consideri successivamente $g|_{]1, +\infty[} :]1, +\infty[\rightarrow e, +\infty[$: si dimostri che è invertibile e si calcoli $(g^{-1})'(e^3)$.

Soluzione

1. Dominio naturale: $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. Simmetrie (pari/dispari):
Il dominio è asimmetrico rispetto allo 0 quindi non presenta simmetrie (né pari né dispari).
3. Segno di $g(x)$:
 $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } g$, inoltre l'argomento dell'esponenziale è sempre non negativo, quindi $g(x) \geq 1$ e $g(x) = 1$ quando $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (minimo globale).
4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti.

Riscriviamo la funzione sciogliendo il modulo per capire meglio l'andamento:

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x-1}} & x \leq 1 \vee x > 1 \\ e^{\frac{x+1}{1-x}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{-}$$

$$\text{Infatti per } x \rightarrow -\infty \text{ si ha } \frac{x+1}{x-1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} < 1$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = e^+ \quad (\text{analogamente})$$

Quindi $y = e$ è un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = +\infty \quad \text{Quindi } x = 1 \text{ è un asintoto verticale.}$$

5. Continuità: g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

6. Derivabilità: g è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Siano $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$, $A :=]-\infty; -1] \cup]1, +\infty[$ e $B :=]-1, 1[$, allora

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & x \in A \\ e^{-f(x)} & x \in B \end{cases}$$

• su A

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{f(x)}$$

• su B

$$g'(x) = -e^{-f(x)} f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{-f(x)}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \quad g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = \frac{1}{2}$$

Quindi la funzione presenta un punto angoloso in $x = -1$, per cui non è derivabile in $x = -1$.

7. Punti critici e segno di $g'(x)$

$$g' < 0 \text{ su } A \quad \text{e} \quad g' > 0 \text{ su } B$$

Quindi f è crescente in A e decrescente in B . Inoltre $g'(x) \neq 0 \forall x \in \text{dom } g$, quindi f non presenta punti critici.

8. Convessità e derivata seconda

• Su A

$$g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} \cdot (f(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} ((f'(x))^2 + f''(x))$$

• Su B

$$g''(x) = (e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} \cdot (f'(x))^2 - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = -e^{-f(x)} ((f'(x))^2 - f''(x))$$

$$f''(x) = 3(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$

$$(f'(x))^2 + f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4+4x-4}{(x-1)^4} = \frac{4x}{(x-1)^4}$$

$$(f'(x))^2 - f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4+x+4}{(x-1)^4} = 4 \frac{2-x}{(x-1)^4}$$

Su A la funzione è concava per $x < -1$ e convessa per $x > 1$, mentre su B la funzione è sempre convessa.

9. Esistenza di massimo e minimo globali:

La funzione presenta un minimo globale in $x = -1$, mentre non presenta massimi globali.

$$\inf_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = \min_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = 1$$

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = +\infty \quad \nexists \max_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Calcoliamo la retta τ tangente al grafico di g nel punto $P(2, g(2))$.

$$\tau(x) - g(2) = g'(2)(x - 2)$$

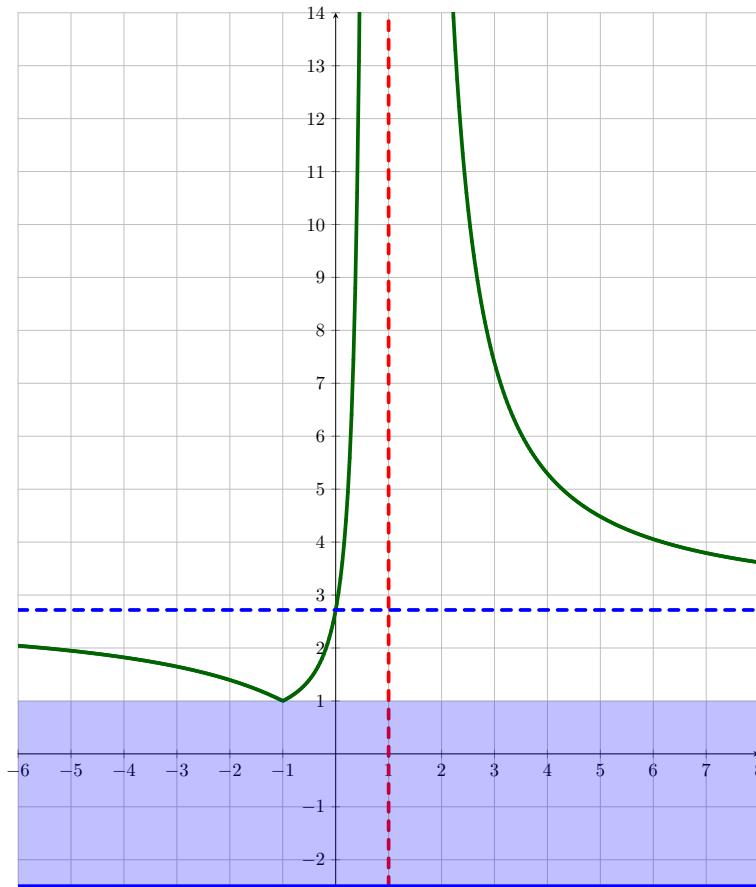
$$\tau(x) = g(2) + g'(2)(x - 2)$$

Consideriamo ora $g|_{]1, +\infty[} :]1, +\infty[\rightarrow]e, +\infty[$. Siccome è monotona (come dimostrato precedentemente), è iniettiva. Inoltre il codominio è l'immagine, per cui è suriettiva. Di conseguenza è invertibile.

$$\exists g^{-1} :]e, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$$

Per calcolare il valore di $(g^{-1})'(e^3)$ applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa, per cui si ha (siccome $g^{-1}(e^3) = 2$)

$$(g^{-1})'(e^3) = \frac{1}{g'(2)}$$



Esercizio 7.2. Sia $g(x) = |x - 1|e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$). Fornire un grafico qualitativo di g e dire per quali valori di α la funzione $g|_{[0, +\infty[}$ ha un massimo assoluto in $x = 0$.

Soluzione Procediamo con lo studio della funzione g .

1. Dominio naturale: $\text{dom } g = \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$

2. Simmetrie (pari/dispari)

La funzione non è dispari perché $g(0) \neq 0$, e non è pari perché $g(1) \neq g(-1)$.

3. Segno di $g(x)$ Siccome è un prodotto di fattori sempre non negativi,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inoltre si ha $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, quindi $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per $g(x)$.

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x - 1|e^{-\alpha x} = [0 \cdot \infty] = 0^+ \quad (y = 0 \text{ asintoto orizzontale destro})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1|e^{-\alpha x} = +\infty$$

5. Continuità: la funzione è continua su \mathbb{R} .

6. Derivabilità Sciogliamo il modulo

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Calcolo ora la derivata

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x > 1 \\ -(e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x}) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) & \text{se } x > 1 \\ e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) = e^{-\alpha}$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) = -e^{-\alpha}$$

g non è quindi derivabile il $x = 1$, ma presenta un punto angoloso.

7. Punti critici e segno di $g'(x)$

- Se $x > 1$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x + \alpha > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

- Se $x < 1$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x - \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

La funzione è crescente in $]1, 1 + \frac{1}{\alpha}[\$ e decrescente in $]1 + \frac{1}{\alpha}, +\infty[\cup] -\infty, 1[$. Ha inoltre un massimo relativo in $1 + \frac{1}{\alpha}$

8. Convessità e derivata seconda

- Se $x > 1$

$$g''(x) = -\alpha e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) - \alpha e^{-\alpha x} = \alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x > \frac{2 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

- Se $x < 1$

$$g''(x) = +\alpha e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) + \alpha e^{-\alpha x} = -\alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow -\alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x < \frac{2 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

La funzione è convessa in $]1, 1 + \frac{2}{\alpha}[\$ e concava altrove. Presenta un flesso in $1 + \frac{2}{\alpha}$

9. Esistenza di massimo e minimo globali:

La funzione presenta un minimo globale in $P(1, 0)$ e non presenta massimi globali.

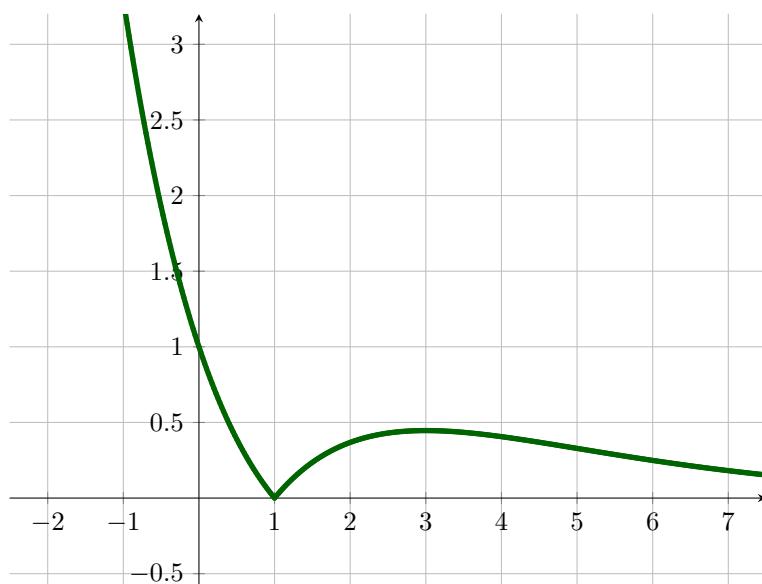
Determiniamo ora per quali α la funzione $g|_{[0, +\infty[}$ ha un massimo assoluto in $x = 0$. Si tratta quindi di risolvere in α la disequazione

$$g(0) \geq g\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$g(0) = 1 \quad g\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1}$$

$$1 \geq \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1} \Leftrightarrow e^{-\alpha-1} \leq \alpha$$

Questa disequazione non può essere risolta analiticamente, conviene quindi ipotizzare un intervallo in cui si trova α per via grafica e poi risolvere numericamente mediante, ad esempio, il metodo di bisezione.



La funzione studiata con $\alpha = \frac{1}{2}$