Esercitazione 9

Serie: ① Carattere della serie
② Somma della serie

① • Condizione necessaria $\left(\lim_n a_n = 0\right)$

- Termini positivi (o negativi)
  - Confronto / conf. asintotico
  - Radice
  - Rapporto
- Segni alterni
  - Leibniz
- Caso generale
  - Conv. assoluta

② • Geometrica
- Telescopica
- Sviluppi di Taylor
- Casi particolari

Es 1 - Carattere

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$

Denotiamo $(a_n)_n$ la succ. che det. la serie.

Cond. necessaria ok.

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2} \Rightarrow$$

$$0 \le a_n \le \frac{1}{n^2} \overset{\text{confr.}}{\Longrightarrow} \underline{\text{convergente.}}$$

b) $\sum_n \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{1+n}\right)$

Cond. nec: $\left(\text{oss che } \tan\left(\frac{1}{1+n}\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+n}\right)$ ok

$a_n \ge 0$ e

$$a_n \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ convergente

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

cond nec ok.

$a_n \geq 0$

Proviamo che **DEFINITIVAMENTE** $a_n \leq \frac{1}{n^2}$.

ovvero $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$.

$a_n \leq \frac{1}{n^2} \iff \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \iff \frac{n^4}{2^n} \leq 1$

Poiché $\frac{n^4}{2^n} \to 0$, $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $\frac{n^4}{2^n} \leq 1$ ok

Allora la serie è convergente!

IN ALTERNATIVA: RADICE!

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1}{2} \Rightarrow$ convergente

d) $\sum_n \frac{2^n}{n!}$

Cond. nec. ok

<u>Rapporto</u>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ <u>convergente!</u>

e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$

Cond. nec. ok!

Cos'è $\cos(\pi n)$?

$$\cos(\pi n) = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow$ segni alterni $\Rightarrow$ LEIBNIZ?

Sia $b_n = \frac{1}{n-1} \Rightarrow a_n = (-1)^n b_n$

Allora:

$b_n \geq 0 \ \forall n$

$b_n \to 0$ se $n \to +\infty$

b_n è decrescente

LEIBNIZ $\Rightarrow$ convergente.

È assolutamente convergente?

$|a_n| = \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ divergente

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2}$

Oss che $-3 \leq 2\cos n - 1 \leq 1$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{3}{n(n+1)^2} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)^2}$

$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \dfrac{3}{n(n+1)^2} \quad \Rightarrow$

Σ è assolutamente convergente

$\Rightarrow$ Σ è convergente!

Es 2. Conv. con parametro.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha}$

Cond. necessaria OK $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Oss. che

$$n^2+n^\alpha \sim \begin{cases} n^2 & \text{se } \alpha < 2 \\ 2n^2 & \text{se } \alpha = 2 \\ n^\alpha & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Caso $\alpha < 2$ ($\alpha = 2$ è analogo)

$$\frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow \underline{\text{divergente}}$$

Caso $\alpha > 2$

$$\frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \sim \frac{n+1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow{(\alpha-1>1)} \text{converge}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n+1}$, $\alpha>0$

Cond. nec?

$$\alpha^n+1 \sim \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha\in(0,1) \\ 2 & \text{se } \alpha=1 \\ \alpha^n & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Caso $\alpha\in(0,1)$ (caso $\alpha=1$ analogo)

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\alpha^n+1} \sim n^\alpha \to +\infty$$

$\Rightarrow$ Se $\alpha\in(0,1]$ divergente!

Caso $\alpha>1$ ok

Sia dunque $\alpha>1$

$$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{\alpha^n+1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha^n} \overset{\text{radice}}{\Longrightarrow} \text{convergente}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n+3n}$

Oss $3^n + 3n \sim 3^n$

$\Rightarrow a_n \sim \left(\frac{\alpha^2}{3}\right)^n$

Converge $\iff \alpha^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$

Diverge altrimenti

Es 3 Serie di potenze: raggio di conv.

$\underbrace{\text{raggio di conv.}}_{r}$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}^{a_n} x^n$

MEMO $r = \frac{1}{\ell}$, $\ell = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow \ell = r = 1.$

$\Rightarrow$

Converge se $x \in (-1,1)$

Non conv.

~~Diverge~~ se $|x| > 1$.

Se $x = 1$, converge per Leibniz (esercizio)

Se $x = -1$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}$

$= - \frac{(-1)^{2n}}{n} = - \frac{1}{n}$ diverge!

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(x+1)^n}{n^2}$ Sia $x+1=y$

$a_n = \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow r = \frac{1}{l} = 1$

Converge se $y \in (-1,1) \iff x \in (-2,0)$

non conv se $x < -2$ o $x > 0$.

Caso $x = -2$

$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$ conv. assolutamente

Caso $x = 0$

$a_n = \frac{4}{n^2}$ converge (ass)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1}$. Sia $y = \frac{x+1}{x-1}$

$$\Rightarrow \Sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\, y^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\, y^{n}$$

Come prima $r = 1$.

Se $y \in (-1,1) \Rightarrow -1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1$

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{x+1}{x-1} \\ \dfrac{x+1}{x-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} \geq 0 \\ \dfrac{2}{x-1} \leq 0 \end{cases}$$

Prima

	0		1	
$-$		$+$		$+$
$-$		$-$		$+$
$+$		$-$		$+$

Seconda

$x \leq 0$ o $x > 1$

$x < 1$

$\Rightarrow$ converge $\Leftarrow$ $\boxed{x \leq 0}$

Es. risolvi $y < -1$ e $y > 1$ e
trova le x per cui la serie non converge

Caso $y = 1$

$y = 1 \iff \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \iff \dfrac{2}{x-1} = 0$ impossibile

Caso $y = -1$

$y = -1 \iff \dfrac{x+1}{x-1} = -1 \iff x = 0$

Se $x = 0$,

$$a_n = \frac{1}{n^2}(-1)^n \quad \text{conv ass.}$$

Es - Carattere con parametro (se c'è!)

a) $\sum_n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$a_n \geq 0$ e $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \rightarrow$ div

b) $\sum_n \frac{1+\cos n}{1-\sin n}$

Oss. che $a_n \geq 0$

Cond. nec? $\lim_n \frac{1+\cos n}{1-\sin n} \nexists$!

(esercizio! trovate due sottosuccessioni con limite diverso).

$\Rightarrow$ divergente!

d) $\sum_n \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n}$ $\quad \beta \geq 0$

<u>Oss</u> $\beta^n + 2^n \asymp \begin{cases} 2^n & \text{se } \beta \leq 2 \\ \beta^n & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$

stesso ordine
di grandezza

(conf. come asintotico per le serie!)

$$\beta^n + 4^n \asymp \begin{cases} 4^n & \beta \leq 4 \\ \beta^n & \beta > 4 \end{cases}$$

<u>Caso $0 \leq \beta \leq 2$</u>

$a_n \asymp \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$ <u>converge</u>

<u>Caso $2 < \beta \leq 4$</u>

$a_n \asymp \frac{\beta^n}{4^n} = \left(\frac{\beta}{4}\right)^n$ conv. <u>sse</u> $\beta \neq 4$

<u>Caso $\beta > 4$</u>

$a_n \asymp 1$ <u>diverge!</u>

d) $\sum_n \left(\sin\left(\frac{n+1}{n-5}\right)\right)^n$

Oss che $\sin\left(\frac{n+1}{n-3}\right) \longrightarrow \sin 1 \geq 0$

Inoltre $\sin\left(\frac{n+1}{n-5}\right)^n \sim \sin(1)^n$

Inoltre $\sin 1 < 1 \Longrightarrow$ converge