A

COGNOME E NOME: ____

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	3	3	2½	3½	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	2	3	4		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathrm{Im}(\frac{1}{\bar{z}}) = 1$.
   Rappresentate qui sotto nel piano di Gauss
   (a) l'insieme E.
   (b) l'insieme $h(E)$, dove $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è la funzione definita da $h(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. (3 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-bx} - x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2 + 2x + c & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Allora f soddisfa su $[-1, 1]$
   (a) le ipotesi del teorema di Weierstrass per a ______, b ______ e c ______.
   Perché? ______________________________
   (b) le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri per a ______, b ______ e c ______.
   Perché? ______________________________
   (c) le ipotesi del teorema di Rolle per a ____________, b ______ e c ______.
   Perché? ______________________________

3. (3 punti) (a) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la parte principale dell'infinitesimo

$$f_\alpha(x) = e^{x^2 - x} - \cos x + \log(1 + x - \alpha x^2)$$

   rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0^+$. Si ha
   ____
   (b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(\frac{1}{\sqrt{n}})$ è convergente se α ______.

4. (3 punti) Usando la definizione determinate il valore dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx.$$

Si ha $I =$ ______.

5. ($2\frac{1}{2}$ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x - \sin x}}{x^{2\alpha}\sqrt{1+x^\alpha}} dx.$$

Allora $I_\alpha =$ ____________.

6. ($3\frac{1}{2}$ punti) (a) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

abbia le coppie $y_1(x) = e^{2x}\cos x$ e $y_2(x) = e^{2x}\sin x$ come soluzioni. Si ha $a =$ ______ e $b =$ ______.

(b) Per i valori di a e b determinati nel punto (a),, risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 5x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione è $y(x) =$ ______________________________.

7. (3 punti) Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua su $]0, 1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è lipschitziana su $]0, 1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ è uniformemente continua su $]0, 1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

8. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^3)\arctan(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) f è derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(c) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Esiste $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)$? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

9. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - (x+2)y^2 + 6x.$$

Allora

(a) i punti di sella di f sono

____

(b) i punti di minimo locale stretto di f sono

____

(c) i punti di massimo locale stretto di f sono

____

(d) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (1, 0, f(1,0))$ è

$$ax + by + z + c = 0,$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

10. (2 punti) Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2, e^{x_2} + x_2 e^{x_1}).$$

(a) Dite se $\mathbf{f}$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(b) Determinate $J_{\mathbf{f}^{-1}}(1,1)$. Si ha

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(1,1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______, $d =$ ______.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (3 punti) Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione polare

$$\rho^2 = 4\cos 2\theta.$$

(a) Rappresentatela nel piano cartesiano.

(b) Sia P il punto di intersezione (nel primo quadrante) della curva con la circonferenza

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Verificate se la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è orizzontale.

12. (4 punti) Sia $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione vettoriale definita da

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1 - z, z - x - 2).$$

(a) Verificate che il sistema $\mathbf{g}(x, y, z) = \mathbf{0}$ definisce implicitamente in un intorno del punto $\mathbf{x_0} = (1, 1, 3)$ due funzioni

$$x \mapsto (y(x), z(x))$$

di classe $\mathcal{C}^\infty$ con $y(1) = 1$ e $z(1) = 3$.

Perché? ____

(b) Si ha $y'(1) =$ ______ e $z'(1) =$ ______.

(c) L'equazione parametrica della retta tangente alla curva $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ nel punto $\mathbf{x_0} = (1, 1, 3)$ è

$$\begin{cases} x = a + bs \\ y = c + ds \\ z = 3 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______, $d =$ ______.