

Ⓐ

1. Vedi A1_20_01 (CdL in Fisica) Es. 1

2. " Es. 4

3. " Es. 6

4. " Es. 8

5. " Es. 9

6. " Es. 10.

7. Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se è vera o falsa.

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua su $]0,1[$. (Vera)

Infatti, poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, possiamo estendere

f con continuità a $[0,1[$. Inoltre si ha $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sin 1$

Consideriamo allora la funzione $\bar{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \sin 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$$

Per il teorema di Heine-Cantor, $\bar{f}$ è uniformemente continua su $[0,1]$ e quindi su $]0,1[$, dove coincide con la funzione f . □

(b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è lipschitziana su $]0,1[$. (Vera)

Segue dal teorema di Lagrange: fissati $x, y \in]0,1[$ si ha

$$* \quad |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y|$$

Ora

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{su }]0,1[$$

$$\text{Oss. che } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} = 0$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \cos 1 - \sin 1$$

Quindi
$$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ f'(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \cos 1 - \sin 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$$

è continua su $[0, 1]$, come lo è $|\tilde{f}'(x)|$. Essa assume quindi minimo e massimo su $[0, 1]$ e si ha

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \leq \max_{x \in [0, 1]} |\tilde{f}'(x)| = M.$$

Da (*) risulta dunque

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| |x - y| \leq M |x - y|.$$

Per l'arbitrarietà di x e y segue allora quanto si vuole. $\square$

(c) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ è uniformemente continua su $]0, 1[$ Falsa

f è una funzione continua su $]0, 1[$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, f risulta non limitata sull'intervallo limitato $]0, 1[$.

Quindi f non è u.c. su $]0, 1[$. $\blacksquare$

8. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^3) \operatorname{arctg}(x+y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) f è continua in $(0, 0)$. Vera

oss. che $\forall (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} |\operatorname{arctg}(x+y)| + \frac{y^3}{x^2 + y^2} |y| |\operatorname{arctg}(x+y)| \\ &\leq |\operatorname{arctg}(x+y)| + |y| |\operatorname{arctg}(x+y)| \end{aligned}$$

$\downarrow (x, y) \rightarrow (0, 0)$ $\downarrow \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$

Quindi $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. $\square$

(b) f è derivabile in $(0,0)$. (Vera)

$$\bullet \forall t \neq 0 \quad \frac{f(0+t\mathbf{e}_1)-f(0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\operatorname{arctg} t - 0}{t} = \frac{\operatorname{arctg} t}{t};$$

$$\text{quindi } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t\mathbf{e}_1)-f(0)}{t} = 1, \text{ ossia } \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.}}$$

$$\bullet \forall t \neq 0 \quad \frac{f(0+t\mathbf{e}_2)-f(0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{-t \operatorname{arctg} t - 0}{t} = -\operatorname{arctg} t;$$

$$\text{quindi } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t\mathbf{e}_2)-f(0)}{t} = 0, \text{ ossia } \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.}}$$

□

(c) f è differenziabile in $(0,0)$. (Falsa)

Nota: f $\nabla \mathbf{h} = (h,k) \quad \mathbf{h} \neq 0$

$$\frac{f(0+\mathbf{h})-f(0)-\langle \nabla f(0), \mathbf{h} \rangle}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{f(\mathbf{h})-\langle (1,0), (h,k) \rangle}{\|\mathbf{h}\|}$$

$$= \frac{f(\mathbf{h})-h}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{(h^2-k^2)\operatorname{arctg}(h+k)-h}{h^2+k^2} =$$

$$= \frac{(h^2-k^2)\operatorname{arctg}(h+k)-h^3-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =: g(h,k).$$

In particolare,

$$g(h,-h) = \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^2|h|} \begin{cases} \nearrow -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } h \rightarrow 0^+ \\ \searrow \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Quindi, in particolare, $g(h,k)$ non tende a 0 per $(h,k) \rightarrow (0,0)$ ed f non è differenziabile in $(0,0)$. □

(d) Esiste $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$? (No)

Basta oss. che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

■

se $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ma allora $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle$ non può essere vera essendo $\langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$.
 f non è differenziabile in $(0,0)$!!

9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - (x+2)y^2 + 6x$

Oss. che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$). Abbiamo che

$$\nabla f(x,y) = (2x - y^2 + 6, 2y - 2y(x+2)) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x - y^2 + 6 = 0 \\ 2y(1 - x - 2) = 0. \end{cases}$

Ora $y(-x-1) = 0 \iff y = 0$ oppure $x = -1$ e

quindi dalla prima eq. segue che i pt. critici di f sono

$(-3,0)$, $(-1,-2)$ e $(-1,2)$. Per determinarne la loro natura calcoliamo la matrice hessiana. Abbiamo

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 2 - 2(x+2) \end{pmatrix}.$$

Risulta allora

$$H_f(-3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$f_{xx}(-3,0) > 0$, $\det H_f(-3,0) = 8 > 0$:
 $(-3,0)$ è pt. di minimo locale stretto di f .

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(-1,-2) = -16 < 0$:
 $(-1,-2)$ è un pt. di sella.

$$H_f(-1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(-1,2) = -16 < 0$:
 $(-1,2)$ è un pt. di sella.

Allora

(a) i pt. di sella sono: $(-1,-2)$ e $(-1,2)$.

☐

(b) i pt. di minimo locale stretto di f sono: $(-3,0)$.

☐

(c) i pt. di massimo locale stretto di f ~~$\exists$~~

☐

(d) L'eq. del piano tangente al grafico di f nel pt. $P_0 = (1,0, f(1,0)) = (1,0,7)$ è $-8x + z + 1 = 0$, e quindi $ax + by + z + c = 0$, dove $a = -8$, $b = 0$, $c = 1$. ■

-5-

10. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2, e^{x_2} + x_2 e^{x_1})$

(a) Dite se f è un diffeomorfismo locale in ogni pt. di $\mathbb{R}^2$. (Si)

Oss. che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ poiché ogni componente lo è (basta $\mathcal{C}^1$)

Inoltre

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2 \\ x_2 e^{x_1} & e^{x_2} + e^{x_1} \end{pmatrix} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

implica

$$\det J_f(x_1, x_2) = e^{x_2} + e^{x_1} + 2x_2^2 e^{x_1} \neq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Risulta che f è un diffeomorfismo locale in ogni pt. di $\mathbb{R}^2$. $\square$

(b) Oss. che $f(x_1, x_2) = (1, 1) \iff \begin{cases} x_1 - x_2^2 = 1 \\ e^{x_2} + x_2 e^{x_1} = 1 \end{cases}$

$$\iff x_1 = 1, x_2 = 0$$

(la soluzione $(x_1, x_2) = (1, 0)$ si veda "a occhio". Altrimenti si

può anche ricavare dalla 1ª eq. $x_1 = 1 + x_2^2$ che inserita nella

2ª eq. dà $e^{x_2} + x_2 e^{1+x_2^2} = 1$, ossia $e^{x_2} + x_2 e^{1+x_2^2} - 1 = 0$.

Che l'eq. $e^x + x e^{1+x^2} - 1 = 0$ abbia sol. $x = 0$ mi sembra immediato!

Essa è unica poiché $(e^x + x e^{1+x^2} - 1)' = e^x + e^{1+x^2} + 2x^2 e^{1+x^2} > 0$)

Risulta

$$J_{f^{-1}}(1, 1) = [J_f(1, 0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+e \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+e} \begin{pmatrix} 1+e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+e} \end{pmatrix}.$$

quindi $J_{f^{-1}}(1, 1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\underline{a=1}, \underline{b=0}, \underline{c=0}, \underline{d=\frac{1}{1+e}}$.

11. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione polare

$$\rho^2 = 4 \cos 2\theta.$$

(a) Risulta dunque $\rho = 2\sqrt{\cos 2\theta}$. Tenendo conto che $\cos 2\theta \geq 0$,

i valori di θ da considerare sono

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

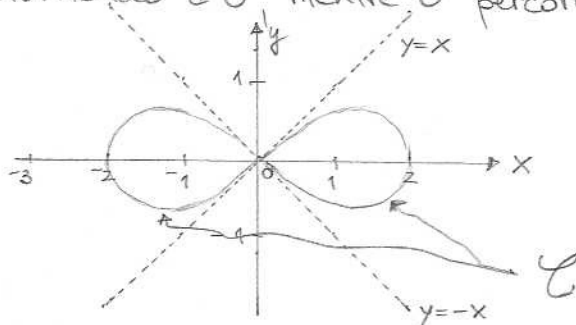
cioè

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otteniamo quindi i seguenti intervalli

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Ne segue che la curva $\mathcal{C}$ si trova nei settori individuati, in coordinate polari, da questi intervalli angolari (che coprono gli intervalli ammissibili in un periodo 2π). Una rappresentazione qualitativa di $\mathcal{C}$ si ottiene quindi a partire dal grafico della funzione $\rho(\theta) = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ che dà, per ogni semiretta uscente dall'origine, la distanza dall'origine del punto che la curva interseca sulla semiretta stessa. Il valore $\rho(\theta)$ passa da 0 a 2, ritornando a 0 mentre θ percorre ciascuno degli intervalli.



□

(b) Notiamo che la curva $\mathcal{C}$ in (a) può essere descritta anche dalla

$$\text{funzione } \underline{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = 2\sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta \\ y(\theta) = 2\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \text{con } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

($\underline{r}$ è una rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$ vista come insieme di pt. di $\mathbb{R}^2$). Il punto $P \in \mathcal{C}$ (nel primo quadrante) appartenente anche alla circonferenza deve soddisfare $x^2(\theta) + y^2(\theta) = 2$, ossia

$$4(\cos 2\theta) \cos^2 \theta + 4(\cos 2\theta) \sin^2 \theta = 2, \quad (\theta \in [0, \frac{\pi}{4}])$$

$$\text{ovv} \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2}; \quad \text{ne segue } 2\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \text{cioè } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Abbiamo } \underline{P} = \left(x\left(\frac{\pi}{6}\right), y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il vettore $\underline{r}'(\theta)$ è tangente alla curva in $P = \underline{r}(\frac{\pi}{6})$. Questo vettore è orizzontale se $y'(\frac{\pi}{6}) = 0$. Calcoliamo allora $y'(\theta)$. Abbiamo
 $y'(\theta) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin 2\theta) 2 \sin \theta + 2\sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta$; allora
 $y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \cancel{2} (\frac{1}{\cancel{2}}) + \cancel{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 0$.
 Possiamo allora asserire che la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è orizzontale.
 (vedi pag. 9, Allegato). ■

12. Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1 - z, z - x - 2)$.

(a) Poniamo $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ con $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1 - z$
 $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ $g_2(x, y, z) = z - x - 2$.

Risulta $g(1, 1, 3) = (1 + 1 + 1 - 3, 3 - 1 - 2) = \underline{0}$. Oss. inoltre che

$$J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} g_{1,x} & g_{1,y} & g_{1,z} \\ g_{2,x} & g_{2,y} & g_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$J_g(1, 1, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, esiste quindi un intorno U di $x_0 = 1$
 ed sono due funzioni $y(x), z(x): U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ con
 $y(1) = 1, z(1) = 3$ e $g(x, y(x), z(x)) = \underline{0} \quad \forall x \in U$. □

(b) Dal teorema del Dini (o dal teorema della funzione implicita) si ha anche

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} &= - \left[J_g^{y,z}(1, 1, 3) \right]^{-1} J_g^x(1, 1, 3) \\ &= - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha $y'(1) = -\frac{1}{2}$ e $z'(1) = 1$. □

(c) L'eq. parametrica della retta tangente alla curva $r(x) = (x, y(x), z(x))$,
 $x \in U$ nel pt. $x_0 = (1, 1, 3)$ è

$$\underline{x} = \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - \frac{1}{2}s \\ z = 3 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\left(\underline{x} = \underline{r}(1) + \underline{r}'(1)s \right)_{s \in \mathbb{R}}$$

ossia

$$\underline{x} = \begin{cases} x = a + bs \\ y = c + ds \\ z = 3 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

dove $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=-\frac{1}{2}$.



Allegato Es. 11

