A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2½	3	2½	2½	3	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3½	3	3	4		36
Punti ottenuti							

1. (2½ punti) Sia

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}{\sin 3x - 3\sin x}.$$

Allora $L =$ ______.

2. (3 punti) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 1 \\ \sin \frac{\pi}{2}x + \int_0^x (t\cos 2\pi t)dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

risulti derivabile in $x = 1$. Si ha $a =$ ______ e $b =$ ______.

3. (2½ punti) Siano

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}) \log \frac{n^2}{n+2}.$$

Allora

(a) la serie in (i) è convergente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________

(b) la serie in (ii) è convergente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________

4. (2½ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2+8\alpha}(\arctan(x-1)^2)^\alpha}{\sqrt[3]{x^3-1}} dx.$$

Allora $I_\alpha =$ ___________.

5. (3 punti) (a) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \qquad 2y'' + 3y' - 2y = e^{\frac{1}{2}x}.$$

Si ha $y(x) =$ ________________________

(b) Determinate le soluzioni dell'equazione (*) che soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $y(x) =$ ________________________.

6. (3 punti) Sia $f(x,y) = \log\left(\dfrac{1-|x|}{1-y^2}\right)$ e sia A il suo insieme di definizione. Rappresentate A qui a fianco.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme $\overline{A}$ è connesso per poligonali. ○ Vera ○ Falsa

(b) L'insieme $\overline{A}$ è compatto. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ____

(c) $\forall \mathbf{x} = (x,y) \in A$, $\exists r > 0 : B_r(\mathbf{x}) \subset A$. ○ Vera ○ Falsa

(d) $\exists r > 0 : A \cap \partial B_r(\mathbf{0}) = \emptyset$. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ____

Sia I_α l'insieme degli $\alpha > 0$ tale che $A \cap \overline{B}_\alpha(\mathbf{0})$ è compatto. Si ha $I_\alpha =$ ______.

7. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y - x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Allora

(a) i punti di massimo locale stretto di f sono

____

(b) i punti di minimo locale stretto di f sono

____

(c) i punti di sella di f sono

____

(d) un vettore normale al grafico di f nel punto $P_0 = (1,0,f(1,0))$ è $\mathbf{v} = (1,a,b)$, dove $a =$ ______ e $b =$ ______.

8. (3 punti) Sia $f(x,y) = \arctan(x^2 - y)$ e sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0\}$. Allora

$$\min_E f = \_\_\_\_\_\_ \qquad \max_E f = \_\_\_\_\_\_.$$

Esistono punti critici di $g(x,y) = f^2(x,y)$ in E che sono punti di estremo locale per g? ○ Sì ○ No

Perché? ____

9. (3½ punti) Per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ assegnata, determinate il minimo e il massimo limite.

(a) Sia $a_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$, allora $\liminf_{n\to+\infty} a_n =$ ______ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n =$ ______.

Perché? ____

(b) Sia $a_n = (-1)^n \arctan\frac{n+1}{n}$, allora $\liminf_{n\to+\infty} a_n =$ ______ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n =$ ______.

Motivate il massimo limite: ____

(c) Sia $a_n = (-1)^n(n-(-1)^n n)$, allora $\liminf_{n\to+\infty} a_n =$ ______ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n =$ ______.

Perché? ____

10. (3 punti) Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 4$$

e sia $P = (-1, 1)$ un punto su $\mathcal{C}$.

(a) L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è

$$ax + by - 2 = 0,$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______.

(b) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che il punto P sia un punto stazionario per $f(x, y) = \log(1 + \alpha x^2 + 4y^2)$ su $\mathcal{C}$.

Allora $\alpha =$ ______.

Perché? ____

11. (3 punti) Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 5x_2, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 5x_1\right).$$

e sia $\mathbf{r} : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la curva di classe $\mathcal{C}^1$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t).$$

(a) Calcolate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle dt =$ ______.

(b) Si ha $(\mathrm{div}\mathbf{f})(\mathbf{r}(t)) =$ ______ per $t \in [0, 2\pi[$.

(c) Posto $\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))$, si ha $\mathbf{h}'(\frac{\pi}{2}) =$ ____________.

Per il seguente esercizio è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

12. (4 punti) (a) Trovate le soluzioni $(\widehat{z}, \widehat{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} (\overline{w} - i)\overline{z}^2 + 2\overline{z} = 0 \\ z(z - w) = 3. \end{cases}$$

(b) Individuate l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : (|z + i| - 2)(|z| - 1) = 0\}$ e rappresentatelo nel piano di Gauss.

(c) Esiste una coppia $(\widehat{z}, \widehat{w})$ che sia soluzione del sistema in (a) e tale che $\widehat{z} \in E$ e $\widehat{w} \in E$?