

(A) 1. Vedi A2-14-02 (CdL in Fisica) Es. 2

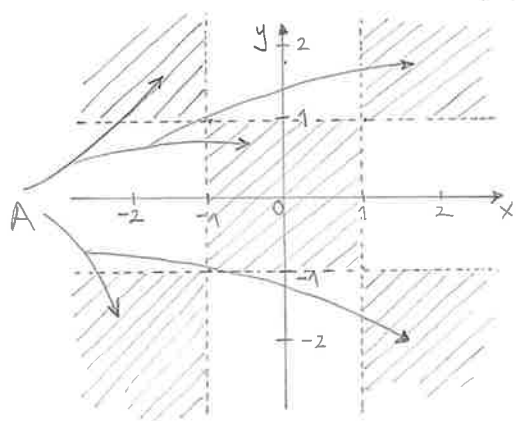
2. " Es. 3

3. " Es. 7

4. " Es. 9

5. " Es. 10

6. $f(x,y) = \log\left(\frac{1-|x|}{1-y^2}\right)$. Abbiamo che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1-|x|}{1-y^2} > 0\}$



$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y^2 < 1\} \cup$$

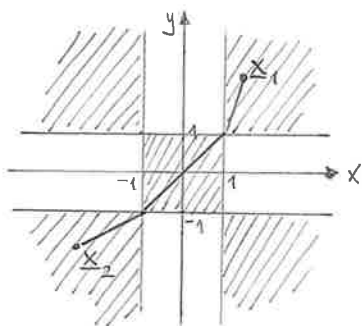
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1, y^2 > 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \cup$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1 \text{ o } x > 1, y < -1 \text{ o } y > 1\}$$

(a) L'insieme $\bar{A}$ è connesso per poligonalità. Vera

$$\bar{A} = A \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\} \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}.$$



Presi $x_1, x_2 \in \bar{A}$ qualsiasi si vede facilmente che $\exists$ una poligonale congiungente x_1 e x_2 tutta contenuta in $\bar{A}$. $\square$

(b) $\bar{A}$ è compatto. Falsa

Infatti, $\bar{A}$ è chiuso, ma non è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. $\square$

(c) $\forall x = (x,y) \in A, \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$. Vera

Infatti, A è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. $\square$

(d) $\exists r > 0 : A \cap B_r(0) = \emptyset$. Vera

$r = \sqrt{2}$ (ovviamente consideriamo la palla $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$) $\square$

$A \cap \bar{B}_\alpha(0)$ è compatto $\forall 0 < \alpha < 1$. Quindi $I_\alpha =]0, 1[$. $\blacksquare$

7. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3 + x^2y - x^2 - \frac{1}{2}y^2$,
 $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$). Risultava

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y.$$

$$\text{Risulta } \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy - 2x = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2 + 3x - 2) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

e si ottengono i pt. critici $(0,0)$, $(-2,4)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y - 2 & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 \quad \det H_f(0,0) = 2$$

$\Rightarrow (0,0)$ pt. di max loc. stretto per f .

$$H_f(-2,4) = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(-2,4) = -10 < 0$$

$\Rightarrow (-2,4)$ pt. di sella.

$$H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{5}{2} < 0$$

$\Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ pt. di sella.

Allora

(a) i pt di max loc. stretto di f sono: $(0,0)$.



(b) i pt. di min. loc. stretto di f : ~~Nono.~~



(c) i pt. di sella di f sono: $(-2,4)$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.



(d) Un vettore normale al grafico di f nel pt. $P_0 = (1,0, f(1,0)) = (1,0,0)$ è $\underline{v} = (1, a, b)$, dove $a=1$, $b=-1$.

(Infatti ricordiamo che $\underline{v} = (\nabla f(x_0, y_0), -1)$ oppure $\underline{v} = (-\nabla f(x_0, y_0), 1)$

Ora $\nabla f(1,0) = (1, 1)$ e quindi deve essere $a=1$ e $b=-1$) ■

8. $f(x,y) = \arctg(x^2 - y)$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0\}$.

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$), E è chiuso e limitato. Per il

teorema di Weierstrass. Sono massimo e minimo di f su E .

Consideriamo dapprima gli eventuali pt. critici interni all'insieme E :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{1+(x^2-y)^2}, \frac{-1}{1+(x^2-y)^2} \right)$$

$\nabla f(x,y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; Non sono pt. critici di f in $\overset{\circ}{E}$.

Applichiamo ora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei pt. stazionari di f su ∂E . Poniamo

$$h(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1. \text{ Notiamo che } \nabla h(x,y) = (2x, 8y) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$(x,y) = (0,0) \notin \partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}.$$

Dobbiamo allora trovare gli (x,y) : $h(x,y) = 0$ e $\det \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2-y)^2} & 2x \\ \frac{-1}{1+(x^2-y)^2} & 8y \end{pmatrix} = 0$

Dobbiamo allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} 8xy + x = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x(8y+1) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Se $x=0$, dalla seconda eq. ricaviamo $y = \pm \frac{1}{2}$, e dunque $(0, \pm \frac{1}{2})$

Se $y = -\frac{1}{8}$, dalla seconda eq. ricaviamo $x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$, e dunque $(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8})$.

Poich 

$$f(0, -\frac{1}{2}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \quad f(0, \frac{1}{2}) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$f(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8}) = \operatorname{arctg} \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{8} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{17}{16} \right)$$

possiamo concludere asserendo

$$\underline{\min_E f = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}$$

$$\underline{\max_E f = \operatorname{arctg} \left(\frac{17}{16} \right)}.$$

□

Infine, posto $g(x,y) = f^2(x,y)$ si ha $\nabla g(x,y) = 2f(x,y) \nabla f(x,y)$

e risulta $\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(x^2-y) = 0$ su $\overset{\circ}{E} \Leftrightarrow y = x^2$ su $\overset{\circ}{E}$.

Oss. che $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + 4y^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 4x^4 + x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}} < x < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{8}} \end{cases}$

Notiamo che per tali (x, x^2) si ha $g(x, x^2) = 0$, mentre $g(x,y) > 0$

$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{E}$, $y \neq x^2$. Quindi i pt. critici di g in $\overset{\circ}{E}$ individuati sono tutti pt. di minimo (assoluti) per g in $\overset{\circ}{E}$. ■

9. (a) $a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Infatti $0 \leq |a_n| \leq \sin \frac{1}{n}$; per il criterio del confronto (due carabinieri) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$, ma allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. □

(b) $a_n = (-1)^n \arctg \frac{n+1}{n}$, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{\pi}{4}$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

Infatti, oss. che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctg \frac{n+1}{n} = \frac{\pi}{4}$. Abbiamo dunque

i) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \quad a_n \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon$

ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \arctg \frac{2k+1}{2k} = \frac{\pi}{4}$. □

(c) $a_n = (-1)^n (n - (-1)^n n)$, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Abbiamo $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -2n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Quindi $(a_n)_n$ è illimitata inferiormente e $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Si ha anche banalmente $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$:

i) $a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = 0$. ■

10. Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'eq.

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 4$$

e sia $P = (-1, 1)$ un pt. su $\mathcal{C}$. Poniamo $g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 4$

(a) Allora $\mathcal{C}$ è data dalla curva di livello 0 della funzione g

L'eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in un suo pt. (x_0, y_0) in cui ∇g non si annulla è data da

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Il pt. $(-1, 1)$ sta su $\mathcal{C}$; inoltre

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y - 2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1) = -2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y + 2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1) = 2$$

Allora l'eq. del piano tangente a $\mathcal{C}$ in P è

$$-2(x+1) + 2(y-1) = 0,$$

ossia $-x + y - 2 = 0.$

Allora l'eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è

$$ax + by - 2 = 0,$$

dove $a = -1$, $b = 1$. □

(b) Dato $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $f(x, y) = \log(1 + \alpha x^2 + 4y^2)$, ricordiamo che

un pt. $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ in cui ∇g non si annulla è un pt. stazionario

per f su $\mathcal{C} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$, ossia

$$\iff \det \begin{pmatrix} \frac{-2\alpha}{1+\alpha+4} & -2 \\ \frac{8}{1+\alpha+4} & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \iff -4\alpha + 16 = 0$$

$$\iff \underline{\underline{\alpha = 4}} \quad \blacksquare$$

11. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 5x_2, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 5x_1 \right)$$

$$\underline{r}: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \langle \underline{f}(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \langle (\sin t + 5\cos t, \cos t + 5\sin t), (\cos t, -\sin t) \rangle dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t \cos t + 5\cos^2 t - \cos t \sin t - 5\sin^2 t) dt \\ &= 5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = 5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \\ &= 5 \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}. \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ricordiamo che $\operatorname{div} \underline{f}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

dove $\underline{f}(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$.

Risulta allora

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{f}(x_1, x_2) &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$(\operatorname{div} \underline{f})(r(t)) = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi[.$$



(c) $\underline{h}(t) = \underline{f}(r(t)) = (\sin t + 5 \cos t, \cos t + 5 \sin t) \quad \forall t \in [0, 2\pi[$

Dunque $\underline{h}'(t) = (\cos t - 5 \sin t, -\sin t + 5 \cos t) \quad \forall t \in [0, 2\pi[$

e in particolare $\underline{h}'(\frac{\pi}{2}) = (-5, -1)$.

