

Tutorato 1)

0) Descrivere $B := \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1-|x|} < x\}$

Sol: Ques: per $x < 0$ non vi sono sol $[\sqrt{\dots} \geq 0]$

$$\begin{aligned} *1) \ x \geq 0 &\Rightarrow \sqrt{1-x} < x \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \text{no modulo} \end{matrix} \\ &\Rightarrow (\sqrt{1-x})^2 < x^2 \Rightarrow 1-x < x^2 \\ &\Rightarrow x^2 + x - 1 > 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \cup \\ &\Rightarrow \underline{x < x_1} \vee \underline{x > x_2} \\ \text{ma } B &= \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \quad \begin{matrix} \text{escluso} \\ \text{da } x \geq 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

1) Riscrivere ex 1.12 per un insieme generico $A \neq \emptyset$

a) e c) basta $A = \mathbb{N}$ $A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A$

b) No pndē : *1 se $|A|=1$ f è iniettiva necessariamente
 *1 se $|A| \geq 2$ f non iniettiva $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists x, y \in A \ x \neq y \text{ s.t. } f(x) = f(y)$
 $\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y)$

d) simile a b)

1*) Dato $A \neq \emptyset$ insieme due se $\exists f: A \rightarrow A, g: A \rightarrow A$ t.c.
 f non suriettiva, g iniettiva, $g \circ f$ suriettiva

Sol: Supponiamo per assurdo che esistano :
 se f non sur. $\exists y \in A$ s.t. $y \notin \text{Im } f$ (se $\exists z \in A \mid f(z) = y$)
 e considero $w = g(y)$ $\underbrace{\quad}_{\text{non esiste}} \quad$
 dato che $g \circ f$ suriettiva $\exists x \in A$ s.t. $g \circ f(x) = w$
 $\Rightarrow g(f(x)) = g(y)$

[dato che g iniettiva] $\Rightarrow f(x) = y$ ASSURDO $\hookrightarrow$ contraddice $\otimes$
 $\Rightarrow \nexists f, g \dots \square$

2) Esistono A infinite e $f: A \rightarrow A$ iniettiva, ma non suriettiva?

Sì: $A = \mathbb{N}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ chiaramente iniettiva,
 $n \mapsto n+1$ ma $0 \notin \text{Im } f$

2*) Trovare cond. necessaria e sufficiente per l'esistenza di A e f

*1) Chiaramente se A finito e f iniettiva $\Rightarrow |A| = |\text{Im } f|$
ma $\text{Im } f \subsetneq A$ dato che f non suriettiva $\Rightarrow \text{Im } f \subsetneq A \Rightarrow |\text{Im } f| < |A|$

$\Rightarrow$ ASSURDO $\S \Rightarrow$
come $|A| = \infty$

*2) se A infinito usando l'Axioma della scelta AC posso costruire una successione di elementi di A tutti diversi
con la quale def:

$$f: A \rightarrow A$$
$$x \mapsto \begin{cases} a_{n+1} & \text{se } \exists n \mid x = a_n \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$a_0 \in A$ qualunque
 $a_i \in A \setminus \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$
qualunque $i > 0$

f è iniettiva, ma $a_0 \notin \text{Im } f$ $\square$