

Esercizi paradigma 10: “...il mondo enigmatico delle serie ...”
(14 - 18 novembre 2022)

10.1) Calcolate la somma delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

10.2) Provate che $0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} < 2\pi$.

10.3) Utilizzando il criterio del confronto asintotico stabilite per quali valori dei parametri le seguenti serie sono convergenti:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + n^\alpha}{n^3 + n^{2\alpha}} \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + n^\beta}{n^3 + n^{\beta+1}} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

10.4) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}; \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}.$$

10.5) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n+3}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n^2 + 1}.$$

10.6) Determinate, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n (\arctan x)^n}{(n + \sin n)\pi^n}.$$

10.7) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n} + 1)2^n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{2n^2}}{n^2} x^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n + \sqrt[3]{n}}.$$

10.8) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze):

$$\begin{aligned} \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n x^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{(2x)^n}{n}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(4n+1)!} x^n; \\ \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n; \quad \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} (x-3)^n; \quad \text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (2 - \log x)^n; \\ \text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} x^n; \quad \text{ix)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n; \quad \text{x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{4^n+1} \left(\frac{x+2}{x^2-2x+3} \right)^n. \end{aligned}$$

10.9) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (riconducibili a serie di potenze):

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n(\log n^2)}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n (\log x)^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^n + \pi^n) x^{2n}.$$

10.10) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi. Provate allora che si ha

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \text{ converge}; \\ \text{ii)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ converge}; \\ \text{iii)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + 1} \text{ converge}. \end{aligned}$$

10.11) Dimostrate che se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|$ è convergente. Provate con un esempio che l'implicazione non è vera se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge solo semplicemente.

10.12) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi e decrescente.

- a) Provate che se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.
- b) Provate con un esempio che l'implicazione inversa in a) non è vera.