Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 10: "...il mondo enigmatico delle serie ..."
(14 - 18 novembre 2022)

10.1) Calcolate la somma delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Soluzione

10.2) Provate che $0 < \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} < 2\pi$.

Soluzione

10.3) Utilizzando il criterio del confronto asintotico stabilite per quali valori dei parametri le seguenti serie sono convergenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+n^\alpha}{n^3+n^{2\alpha}}$ $\alpha\in\mathbb{R}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+n^\beta}{n^3+n^{\beta+1}}$ $\beta\in\mathbb{R}$.

Soluzione

10.4) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}$.

Soluzione

10.5) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n+3}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n^2+1}$.

Soluzione

10.6) Determinate, al variare di $x\in\mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\frac{4^n(\arctan x)^n}{(n+\sin n)\pi^n} .$$

Soluzione

10.7) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^{2n^2}}{n^2}x^n$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n+\sqrt[3]{n}}$.

Soluzione

10.8) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze):

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n x^n$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2}\frac{(2x)^n}{n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(4n+1)!}x^n$;

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$; vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4}(x-3)^n$; vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(2-\log x)^n$;

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1}x^n$; ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$; x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{4^n+1}\left(\frac{x+2}{x^2-2x+3}\right)^n$.

Soluzione

10.9) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (riconducibili a serie di potenze):

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n(\log n^2)}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n (\log x)^n$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (e^n + \pi^n) x^{2n}$.

Soluzione

10.10) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi. Provate allora che si ha

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \quad \text{converge}\,;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \quad \text{converge}\,;$

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n+1} \quad \text{converge}\,.$

Soluzione

10.11) Dimostrate che se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n+1}-a_n|$ è convergente. Provate con un esempio che l'implicazione non è vera se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge solo semplicemente.

Soluzione

10.12) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi e decrescente.

a) Provate che se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$.

b) Provate con un esempio che l'implicazione inversa in a) non è vera.

Soluzione