Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 11 : "...il mondo delle primitive - integrali e la funzione integrale ..."
(21 - 25 novembre 2022)

Qui in seguito sono proposti alcuni esercizi (raccolti per tipologia) su questi argomenti. Potete trovare ulteriori esercizi sul sito dell'a.a. 2014/15 in materiale didattico Esercizi-9-09-12

11.1) a) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ risulta derivabile su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (e^{-t^2} + t)\, dt & \text{se } x > 0 \\ a^2 \sin x + b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Calcolate il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^2} \int_0^{\log^2(1+2x)} \sqrt[3]{1+t^2}\,dt\,.$$

11.2) i) Provate che la funzione $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\log\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4+x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ su $\mathbb{R}$.

ii) Calcolate $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

iii) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - 2x}{x^3}$.

11.3) Usando la tabella delle primitive elementari (o quasi immediate), determinate le primitive delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \cos 3x + e^{-2x}$; ii) $f(x) = \dfrac{(\log x)^3}{x} - x2^{x^2}$; iii) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2} + \dfrac{2}{1-x}$.

11.4) Calcolate i seguenti integrali quasi immediati:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \log^2 x}{2x}dx\,; \quad \int \frac{x}{x^2+1}dx\,; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,; \quad \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,; \quad \int \frac{1}{\cos^2 2x}dx\,.$$

11.5) Calcolate i seguenti integrali immediati:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 2x + e}{x}dx\,; \quad \int_0^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1}dx\,; \quad \int_{-1}^4 |x^2 - 2x|dx\,; \quad \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx\,.$$

11.6) Calcolate per parti i seguenti integrali:

$$\int x \arcsin x dx\,; \quad \int x^4 \log 2x dx\,; \quad \int (2x+1)^2 e^x dx\,; \quad \int x^3 e^{-x} dx\,; \quad \int \log(1+x^2)dx\,.$$

11.7) Calcolate i seguenti integrali usando delle sostituzioni opportune (e integrando eventualmente poi funzioni razionali oppure per parti):

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}dx\,; \quad \int \sqrt{4-x^2}dx\,; \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx\,; \quad \int \frac{1}{\cos x}dx\,; \quad \int \sqrt{2+x^2}dx\,.$$

11.8) i) Studiate brevemente la funzione $f(x) = -xe^{x^2} + e$ e tracciate un suo grafico qualitativo. Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$.

ii) Al variare del parametro $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, rappresentate nel piano cartesiano la regione piana

$$A(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \tfrac{\pi}{2},\ \log \tfrac{2x}{\pi} \leq y \leq \cos x\}.$$

Determinate la sua area e calcolate $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

11.9) i) Calcolate il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2}dt + 2x - x^2}{x^3}.$$

ii) Determinate l'ordine d'infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, dell'infinitesimo

$$f(x) = \sin x - \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

11.10) a) i) (cambio di scala) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $\lambda > 0$. Sia $f : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)dx = \int_a^b f(\lambda x)dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[0, 2]$ la formula

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(2x)dx.$$

b) (invarianza per traslazione) i) Siano $a, b, \tau \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a+\tau, b+\tau] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x)dx = \int_a^b f(x+\tau)dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[2, 3]$ la formula

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x+3)dx.$$

c) (invarianza per riflessione) i) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[-3, -2]$ la formula

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = \int_2^3 f(-x)dx.$$

d) (simmetria) Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Allora

i) se f è dispari, vale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

ii) se f è pari, vale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

11.11) Sia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-2, 0] \\ 3|x-1| - 3 & \text{se } x \in]0, 2] \\ -1 & \text{se } x \in]2, 3]\,. \end{cases}$$

Studiate la funzione integrale $F : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ indicando in quali punti la funzione F non è derivabile e rappresentatela nel piano cartesiano.

11.12) Sia $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{2^{x^2-1}(1-\cos\sqrt{x})}{\log(1+x)\arctan\sqrt{x^3}}$.

i) Provate che $f(x) \sim \dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$ per $x \to 0^+$.

ii) Calcolate $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}} f(x)dx$.

iii) Trovate due successioni infinitesime $(a_n)_n$ di numeri reali positivi tali che i rispettivi limiti $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+a_n} f(x)dx$ risultino 0 e $+\infty$.

11.13) Sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e sia $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Studiate la monotonia e la convessità della funzione F. La funzione F è iniettiva? È suriettiva?

11.14) Sia $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Provate che

$$\sup_{a \le x_1 < x_2 \le b} |u(x_1) - u(x_2)| \le \int_a^b |u'(x)|dx.$$