

Esercizi paradigma 12 : “...stiamo per convergere... integrali generalizzati e la funzione integrale ...”

(28 novembre - 2 dicembre 2022)

12.1) a) Determinate i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$\int \frac{1}{2x - 4x^2} dx; \quad \int \frac{x+3}{x^2+2} dx; \quad \int \frac{x+1}{x(x-2)} dx; \quad \int \frac{3x^3+x^2}{x+1} dx; \quad \int \frac{1}{x^2+x+2} dx.$$

b) Determinate i seguenti integrali definiti:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + 1} dx; \quad \int_1^2 \frac{8x+1}{x^2-x-6} dx; \\ \text{ii)} \quad & \int_0^2 \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1} dx; \quad \int_{-1}^0 \frac{-2x^3+x^2+2x+2}{x^2+3} dx; \quad \int_0^3 \frac{2x}{x^2+2x+5} dx. \end{aligned}$$

12.2) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

$$\text{i)} \quad \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx; \quad \text{iii)} \quad \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)} dx.$$

12.3) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

$$\text{i)} \quad \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(x-1)\log^2(x-1)} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx.$$

12.4) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\text{i)} \quad \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\tan x} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2}\sqrt{3x+1}} dx.$$

12.5) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale generalizzato

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x+\arctan \sqrt{x}}{|x+1|^\alpha x^{2\alpha}} dx; \\ \text{iii)} \quad & \int_{-\infty}^0 \frac{\arctan \sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha}|x|^{\alpha+1}} dx; \quad \text{iv)} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos \sqrt{x}}{\sqrt[4]{(x-x^2)^\alpha}} dx. \end{aligned}$$

12.6) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che risulti convergente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1 - \alpha \sin x}{x^2} dx.$$

12.7) Discutete la convergenza dei seguenti integrali generalizzati. Calcolate poi, usando la definizione, i loro valori.

$$\text{i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_{-\infty}^1 \frac{3}{x^2+2x+3} dx.$$

12.8) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_0^1 \frac{\sin \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2} \arctan \sqrt[4]{x}} dx.$$

12.9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, per i quali i seguenti integrali impropri convergono:

$$\text{i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx; \quad \text{ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha} \arctan(x^{-3})}{(x^2+x)^{\frac{\alpha}{3}} \arctan x^2} dx.$$

12.10) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, tali che risultino convergenti i seguenti integrali impropri:

$$\text{i)} \quad \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{1-x}}{(\tan \sqrt{1-x})(1-\cos x^{2\alpha})} dx; \quad \text{ii)} \quad \int_1^3 \frac{e^{\sqrt[3]{3-x}}-1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}(3-x)^{2\alpha}}} dx.$$

- 12.11) i) Discutete la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x + 1}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx$.
- ii) Stabilite per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + 2x^{3\alpha}) \arctan x^\alpha} dx$ risulta convergente.
- iii) Stabilite per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sin x^{2\alpha} \tan(1-x^2)} dx$ risulta convergente.
- 12.12) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere (motivando la risposta)?
- i) La funzione $F(x) : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ è una primitiva di f .
- ii) $F(0)$ dà il valore dell'area del sottografico di f relativo all'intervallo $[0, 2]$.
- iii) $F(1) \leq 0$.
- iv) Se f è continua su $[-1, 4]$, allora $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1, 4]$.
- v) Se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, allora esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- vi) Se $f(x) = 2^x$, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\frac{4}{\log 2}$.
- 12.13) Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta)?
- i) Se $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente, allora necessariamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- ii) Se f è anche una funzione infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, allora necessariamente f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$.
- iii) Se f è una funzione decrescente e $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, allora necessariamente f è una funzione infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.
- iv) Se $x^2 f(x)$ è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, allora la funzione f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$.
- 12.14) Sia $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = \int_x^{x+\sin x} \frac{1}{\log(1+t)} dt$.
- i) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- ii) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x)$.
- iii) Verificate che la funzione derivata $h'(x)$ è limitata su $]0, +\infty[$.