Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 14 : "L'Universo è un'equazione differenziale" [Henri Poincarè]...
(12 - 22 dicembre 2022)

14.1) Risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi a equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

i) $\begin{cases} y'(x) = \frac{x+2}{x+1} y(x) \\ y(1) = 3; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} ye^{2x} - (1+e^{2x})y'(x) = 0 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

Soluzione Soluzione

14.2) Determinate l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

i) $y'(x) - 3y(x) = e^x\,;$

ii)$y'(x) - xy(x) = e^x(-x+1)\,;$

iii) $y'(x) + (x+3)y(x) = y(x) + x + 2\,;$

iv) $y'(x) - y(x) = \sin x\,.$

Soluzione

14.3) Risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi a equazioni differenziali lineari del primo ordine:

i) $\begin{cases} y'(x) = -\frac{2y(x)}{x} + x^3 \\ y(1) = 1\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y'(x) = 2xy(x) + x^3 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$

Soluzione

14.4) Determinate l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti ed omogenee:

i) $y''(x) - 4y(x) = 0\,;$

ii) $y''(x) + 4y'(x) = 0\,;$

iii) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0\,;$

iv) $y''(x) + 2y(x) = 0\,;$

v) $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0\,.$

Soluzione

14.5) Determinate l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e completi:

i) $y''(x) + 4y(x) = x^2\,;$

ii) $y''(x) + y(x) = 3\cos x\,;$

iii) $y''(x) + y(x) = 3\sin 2x\,;$

iv) $y''(x) + y'(x) = x^2 + x + 1\,;$

v) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 2e^{\alpha x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

14.6) Scrivete un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti che abbia le seguenti coppie come soluzioni:

i) $y_1(x) = \sin 2x \qquad y_2(x) = \cos 2x\,;$

ii) $y_1(x) = e^x \sin\sqrt{3}x \qquad y_2(x) = e^x\cos\sqrt{3}x\,;$

iii) $y_1(x) = 1 \qquad y_2(x) = x\,;$

iv) $y_1(x) = e^{-2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}\,.$

Soluzione

14.7) Risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi a equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e completi:

i) $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 2e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 2e^{x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$

Soluzione

14.8) i) Verificate che l'equazione $y'' - 2y' - 3y = 0$ ammette una soluzione (unica) che verifica la condizione $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y(x)dx = 2$. Determinatela!

ii) Verificate che l'equazione $y'' - 2y' - 3y = 0$ ammette una soluzione che verifica la condizione $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} y(x) = 2$. È unica?

Soluzione

14.9) Sia data l'equazione differenziale $y'(x) = -\dfrac{2y(x)}{x} + \sin x$.

i) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale.

ii) Provate che esiste un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ che soddisfa l'equazione per ogni $x \neq 0$.

Soluzione

14.10) i) Determinate un'equazione differenziale del primo ordine autonoma (in forma normale) della quale $y(x) = \dfrac{x}{x+1}$ è soluzione.

ii) Analogamente per $y(x) = \sinh x$.

Soluzione

14.11) Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+x)^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(Suggerimento: fare un cambiamento di variabile.)

Soluzione

14.12) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *strettamente convessa* se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$ e $\forall \lambda \in \,]0,1[$ vale

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *(strettamente) concava* se la funzione $-f$ è (strettamente) convessa.
i) Dimostrate che sull'intervallo $]0,+\infty[$ la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è strettamente convessa.
ii) Dimostrate che sull'intervallo $[0,+\infty[$ la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è strettamente concava.

Soluzione

14.13) Sia $f : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ una funzione concava tale che $f(0) = 0$. Dimostrate che la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ è decrescente per $x > 0$.

Soluzione

14.14) Sia $f : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ una funzione concava. Dimostrate che, se vale $f(0) = 0$, allora f è subadditiva su $[0,+\infty[$, cioè $\forall a, b \in [0,+\infty[$ si ha

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Dimostrate che, se vale $f(0) > 0$, allora $\forall a, b \in [0,+\infty[$ si ha

$$f(a+b) < f(a) + f(b).$$

Soluzione

14.15) Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^1 tale che $f(0) \leq 0$. Provate che per ogni $x \geq 0$ vale

$$f(x) \leq x f'(x).$$

Soluzione