

**Esercizi paradigma 1: “Linguaggio, insiemi e funzioni”** (12 - 16 settembre 2022)

1.1) Stabilite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false:

- a)  $\exists x \in \mathbb{N} : (x-1)^2 = x^2 + 1$ ;      b)  $\forall x \in \mathbb{N}, (x-1)^2 = x^2 + 1$ ;      c)  $\forall x \in \mathbb{N}, (x-1)^2 \leq x^2 + 1$ ;  
d)  $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x = 5^x$ ;      e)  $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x = 5^x$ ;      f)  $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x \leq 5^x$ ;  
g)  $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x \leq 5^x$ ;      h)  $\exists x \in \mathbb{N} : 3^x + 4^x \geq 5^x$ ;      i)  $\forall x \in \mathbb{N}, 3^x + 4^x \geq 5^x$ .

**Soluzione**

1.2) Sia  $\mathcal{Q}(x, y)$  il predicato “ $x \leq y^2$ ”. Stabilite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false:

- a)  $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$ ;      b)  $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$ ;      c)  $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$ ;  
d)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y)$ ;      e)  $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$ ;      f)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y)$ .

**Soluzione**

1.3) Dite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta, provando, per esempio, che la negazione è una proposizione vera o falsa):

- a)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x - y \leq 0$ ;      b)  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : 4x + 2y = 0$ ;  
c)  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : 2x - 4y = 0$ ;      d)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, [(x \neq y) \implies (x^2 \neq y^2)]$ ;  
e)  $\exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{R}, (2x + 1)y = 0$ ;      f)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : (y + 1)x \geq 0$ .

**Soluzione**

1.4) Siano dati gli insiemi  $A = [-2, 5[$ ,  $B = ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$  e  $C = \{-1, 2\}$ .

- a) Rappresentate graficamente gli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  sulla retta reale.  
b) Individuate quali delle seguenti scritture sono corrette; per ciascuna delle scritture corrette dite se esprime un'affermazione vera o falsa:

$$-1 \in B; \quad \{-1\} \subseteq C; \quad A \cap C = C; \quad 4 \in A; \quad ]2, 5[ \subset A; \quad C \subseteq \mathbb{R} \setminus B; \quad C \setminus A \neq \emptyset.$$

**Soluzione**

1.5) a) Rappresentate graficamente sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 \geq 3x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} < 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 9)(x^2 + 2) = 0\}.$$

- b) Determinate  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \setminus A$  e  $\mathbb{R} \setminus B$ . Gli insiemi  $A$  e  $B$  sono disgiunti?  
c) Dite se gli insiemi  $A$  e  $B$  sono degli intervalli.  
d) Dite se sono vere o false le seguenti affermazioni (motivando le risposte):

$$[-1, 0] \in \mathcal{P}(A); \quad \{-2, 2\} \subseteq B; \quad C = [-3, 3]; \quad A \cap C = \{-3\}; \quad B \subseteq \mathcal{P}(B); \quad C \in \mathcal{P}(B).$$

e) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi  $\{-1\} \times C$ ;  $C \times A$  e  $B \times A$ . **Soluzione**

1.6) a) Rappresentate graficamente sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| + |x^2 - 1| \geq 2x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[4]{1 - |x|} < 1\}.$$

- b) Dite se sono intervalli. Dite se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti.  
c) Determinate gli insiemi  $B \cup C$ ,  $B \cap C$  e  $B \setminus C$ . **Soluzione**

1.7) Rappresentate nel piano cartesiano le funzioni

a)  $f(x) = x^2 + 1$ ;  $f(x) = (x - 1)^2$ ;  $f(x) = -x^2$ ;  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ ;  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

b)  $f(x) = x^3 - 1$ ;  $f(x) = -x^3$ ;  $f(x) = -(x + 1)^3 + 1$ .

c)  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$ , per  $x \geq -1$ ;  $f(x) = -\sqrt{x} - 1$  per  $x \geq 0$ .

d)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ;  $f(x) = -\sqrt[3]{x+1} - 1$ .

e)  $f(x) = 2^x - 1$ ;  $f(x) = -2^{x-1}$ ;  $f(x) = e^{|x|} + 1$ .

f)  $f(x) = 1 - \log x$ , per  $x > 0$ ;  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ , per  $x > 0$ ;  $f(x) = \log_2(x + 1)$ , per  $x > -1$ .

[Soluzione](#)

1.8) Per ciascuna delle seguenti espressioni determinate l'insieme dei numeri reali per cui è definita:

a)  $\sqrt{|x-1|+2x}$ ; b)  $\sqrt[3]{\log(x-\sqrt{x})}$ ; c)  $\sqrt[4]{1-\log x}$ ; d)  $\log \left| e^x - \frac{1}{e} \right|$ . [Soluzione](#)

1.9) Siano date le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 0 \\ 3x+1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x-1 & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

i) Determinate l'immagine di  $f$  e l'immagine di  $g$ .

ii) Dite se sono funzioni iniettive, e se sono funzioni suriettive.

iii) Determinate, dove esiste, la funzione composta  $f \circ g$ . [Soluzione](#)

1.10) Date le funzioni  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

determinate l'espressione delle funzioni composte  $g \circ f$  ed  $f \circ g$ . [Soluzione](#)

1.11) Per ciascuna delle seguenti funzioni determinate, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione  $f(x) = \lambda$ :

$$f(x) = (x-1)^2 + 3; \quad f(x) = -|x+1|; \quad f(x) = |x^2 + 2x|; \quad f(x) = e^{x+2} - 1; \quad f(x) = -e^{-x^2}.$$

[Soluzione](#)

1.12) a) Trovate due funzioni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , con  $g$  non iniettiva e  $g \circ f$  iniettiva.

b) Esistono due funzioni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , con  $f$  non iniettiva e  $g \circ f$  iniettiva?

c) Trovate due funzioni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , con  $f$  non suriettiva e  $g \circ f$  suriettiva.

d) Esistono due funzioni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , con  $g$  non suriettiva e  $g \circ f$  suriettiva?

[Soluzione](#)