

Esercizi paradigma 2: “Principio d’induzione, estremo sup/inf e un po’ di numeri reali”
(19 - 23 settembre 2022)

- 2.1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \arctan(|x|) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- i) Determinate l’immagine tramite f degli intervalli $[-1, 2]$ e $]-\infty, -1[$.
 - ii) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{-1\}$, $\{\frac{\pi}{4}, 4\}$ e $\mathbb{R}$.
- 2.2) Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 6 \arcsin(\frac{x}{2}) + \pi$, dove D è l’insieme di definizione di f .
- i) Determinate D e l’immagine $f(D)$ di f .
 - ii) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e della sua inversa $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$.
 - iii) Scrivete l’espressione analitica di f^{-1} .
 - iv) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{\frac{5\pi}{2}\}$, $[2\pi, 3\pi[$ e $[-\pi, +\infty[$.
- 2.3) Provate, usando il principio di induzione, che
- i) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$;
 - ii) $n^2 \geq 2n+1$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$;
 - iii) $2^n \geq n^2$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$;
 - iv) $n! \geq 3^{n-2}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 2.4) Provate, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti relazioni:
- i) $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
 - ii) $3^n \geq n2^n$.
- 2.5) Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze determinate per quali interi positivi n la disuguaglianza è vera:
- i) $3^n + 4^n \leq 5^n$;
 - ii) $n^n \geq 2^n n!$.

Qualche punto degli esercizi 2.6)-2.13) riguarda le nozioni di estremo inferiore/estremo superiore di un insieme che vedremo nella prossima lezione. Lascio comunque come ‘Esercizi Sfida’ lo svolgimento di tali consegne, avendo a disposizione le definizioni qui sotto!! BUON LAVORO!!

Estremo inferiore: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato inferiormente, si dice estremo inferiore di A , e si scrive $\inf A$, il massimo dei minoranti di A , ossia $\inf A = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ è un minorante di } A\}$ (Dimostreremo nella 6Lez che in $\mathbb{R}$ esiste $\inf A$).

E’ utile per gli esercizi la seguente caratterizzazione dell’estremo inferiore. Sia $l \in \mathbb{R}$. Allora $l = \inf A$ se e solo se l verifica entrambe le seguenti proprietà:

- i) $\forall x \in A$, $l \leq x$ (cioè l è un minorante di A)
- ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon < l + \varepsilon$ (cioè l è il più grande dei minoranti di A).

Se A non è limitato inferiormente, si definisce $\inf A = -\infty$.

Estremo superiore: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato superiormente, si dice estremo superiore di A , e si scrive $\sup A$, il minimo dei maggioranti di A , ossia $\sup A = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ è un maggiorante di } A\}$ (Dimostreremo nella 6Lez che in $\mathbb{R}$ esiste $\sup A$).

E' utile per gli esercizi la seguente caratterizzazione dell'estremo superiore. Sia $L \in \mathbb{R}$. Allora $L = \sup A$ se e solo se L verifica entrambe le seguenti proprietà:

- i) $\forall x \in A, x \leq L$ (cioè L è un maggiorante di A)
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : L - \varepsilon < x_\varepsilon$ (cioè L è il più piccolo dei maggioranti di A).

Se A non è limitato superiormente, si definisce $\sup A = +\infty$.

2.6) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) L'insieme A ha minimo.
- b) Il numero $\sqrt{2} + 1$ è l'estremo superiore di A e non è il massimo di A .
- c) Si ha $\inf A = \sqrt{2}$.
- d) L'insieme A non è limitato.

2.7) a) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4x + x^2}{x - 1} \geq x\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |(x^2 - 4)(x^2 - 1)| \leq 0\}; \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x}{x - 1} \leq 1 - x\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x \leq x\}; \quad F = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0\}.$$

b) Di ogni insieme determinato nel punto a)

- i) dite se è limitato (inferiormente/superiormente);
- ii) individuate l'insieme dei suoi maggioranti e l'insieme dei suoi minoranti;
- iii) determinate il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore e dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

2.8) Siano dati due insiemi non vuoti E ed F , con $F \subset E \subset \mathbb{R}$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilite se è vera o falsa. Nel caso sia falsa, fornite un controesempio.

- a) Se F è limitato inferiormente, allora lo è anche E .
- b) Se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$.
- c) Se E è limitato superiormente, allora $\sup F$ è un numero reale.
- d) Si ha $E \times F \subseteq E \times E$.

2.9) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente. Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

- i) $A = \{x_n = \frac{3n - 2}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; ii) $A = \{x_n = n^2 - 2n - 3, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$;
- iii) $A = \{x_n = (-1)^n \frac{3n - 1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; iv) $A = \{x \in \mathbb{R} : -6x^2 - |x| + 1 > 0\}$.

2.10) Sia $A = \{x_n = \frac{3n - 1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

- i) Provate che si ha $0 < x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
- ii) Provate che si ha $\inf A = 0$ e $\sup A = 2$.
- iii) Dite se sono minimo e massimo, rispettivamente.

2.11) a) Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente (motivate le risposte!).

b) Determinate l'insieme A definito da $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x - 3|}{|x + 2|} \leq 1\}$.

Determinate $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$. Dite se A è un intervallo e se A è limitato.

2.12) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup E = 1$. Per ciascuna delle seguenti proposizioni dite se la proposizione è necessariamente vera:

- i) $\forall x \in E, x > 0.9$; ii) $\forall x \in E, x < 1$;
- iii) $\exists x \in E : x > 0.9$; iv) $\exists x \in E : x < 1$.

2.13) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Trovate tutte le coppie $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ di affermazioni, dove $\mathcal{P}$ è un'affermazione della prima colonna e $\mathcal{Q}$ è un'affermazione della seconda, tali che $\mathcal{P}$ implichi $\mathcal{Q}$.

- | | |
|---|------------------------------------|
| i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : y \geq x$ | a) A è limitato inferiormente. |
| ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y \geq x$ | b) Si ha $\sup A = +\infty$. |
| iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in A, y \geq x$ | c) A ammette minimo. |
| iv) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A, y \geq x$ | d) A è limitato superiormente. |
| v) $\exists x \in A : \forall y \in A, y \geq x$ | e) A è illimitato superiormente. |
| vi) $\forall x \in A, \exists y \in A : y \geq x + 1$ | f) Si ha $\inf A = -\infty$. |
| vii) $\forall x \in A, \exists y \in A : y > x$ | g) A non ammette massimo. |

2.14) Dimostrate che per ogni $x, y, a \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti disuguaglianze:

- i) $|x + y| \leq |x| + |y|$; ii) $|x - y| \leq |x - a| + |y - a|$; iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

2.15) Dimostrate che per ogni $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ valgono le seguenti disuguaglianze:

- i) $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$; ii) $xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}y^2$; iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$.

2.16) Siano $a, b, C \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$a^2 \leq C(a + b).$$

Allora

- i) $a^2 \leq 2Cb + C^2$;
- ii) $a \leq b + C$.