Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 2: "Principio d'induzione, estremo sup/inf e un po' di numeri reali"
(19 - 23 settembre 2022)

2.1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \arctan(|x|) & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 2x^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

i) Determinate l'immagine tramite f degli intervalli $[-1, 2]$ e $]-\infty, -1[$.

ii) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{-1\}$, $\{\frac{\pi}{4}, 4\}$ e $\mathbb{R}$. Soluzione

2.2) Sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 6 \arcsin(\frac{x}{2}) + \pi$, dove D è l'insieme di definizione di f.

i) Determinate D e l'immagine $f(D)$ di f.

ii) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e della sua inversa $f^{-1} : f(D) \to D$.

iii) Scrivete l'espressione analitica di f^{-1}.

iv) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{\frac{5\pi}{2}\}$, $[2\pi, 3\pi[$ e $[-\pi, +\infty[$. Soluzione

2.3) Provate, usando il principio di induzione, che

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$;

ii) $n^2 \ge 2n + 1$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$;

iii) $2^n \ge n^2$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\ge 4}$;

iv) $n! \ge 3^{n-2}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$. Soluzione Soluzione

2.4) Provate, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti relazioni:

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

ii) $3^n \ge n2^n$. Soluzione

2.5) Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze determinate per quali interi positivi n la disuguaglianza è vera:

i) $3^n + 4^n \le 5^n$;

ii) $n^n \ge 2^n n!$. Soluzione

Qualche punto degli esercizi 2.6)-2.13) riguarda le nozioni di estremo inferiore/estremo superiore di un insieme che vedremo nella prossima lezione. Lascio comunque come 'Esercizi Sfida' lo svolgimento di tali consegne, avendo a disposizione le definizioni qui sotto!! BUON LAVORO!!

Estremo inferiore: Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.
Se A è limitato inferiormente, si dice estremo inferiore di A, e si scrive $\inf A$, il massimo dei minoranti di A, ossia $\inf A = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ è un minorante di } A\}$ (Dimostreremo nella 6Lez che in $\mathbb{R}$ esiste $\inf A$).

E' utile per gli esercizi la seguente caratterizzazione dell'estremo inferiore. Sia $l \in \mathbb{R}$. Allora $l = \inf A$ se e solo se l verifica entrambe le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{i) } \forall x \in A,\ l \le x \text{ (cioè } l \text{ è un minorante di } A) \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon < l + \varepsilon \text{ (cioè } l \text{ è il più grande dei minoranti di } A). \end{cases}$$

Se A non è limitato inferiormente, si definisce $\inf A = -\infty$.

Estremo superiore: Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.
Se A è limitato superiormente, si dice estremo superiore di A, e si scrive $\sup A$, il minimo dei maggioranti di A, ossia $\sup A = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ è un maggiorante di } A\}$ (Dimostreremo nella 6Lez che in $\mathbb{R}$ esiste $\sup A$).

E' utile per gli esercizi la seguente caratterizzazione dell'estremo superiore. Sia $L \in \mathbb{R}$. Allora $L = \sup A$ se e solo se L verifica entrambe le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \quad x \leq L \text{ (cioè } L \text{ è un maggiorante di } A) \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : L - \varepsilon < x_\varepsilon \text{ (cioè } L \text{ è il più piccolo dei maggioranti di } A). \end{cases}$$

Se A non è limitato superiormente, si definisce $\sup A = +\infty$.

2.6) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k},\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) L'insieme A ha minimo.

b) Il numero $\sqrt{2} + 1$ è l'estremo superiore di A e non è il massimo di A.

c) Si ha $\inf A = \sqrt{2}$.

d) L'insieme A non è limitato. Soluzione

2.7) a) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi

$A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{4x + x^2}{x - 1} \geq x\}$; $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} : \left|(x^2 - 4)(x^2 - 1)\right| \leq 0\}$; $\quad D = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 + 5x}{x - 1} \leq 1 - x\}$;

$E = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x \leq x\}$; $\quad F = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{|x| - 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0\}$.

b) Di ogni insieme determinato nel punto a)

i) dite se è limitato (inferiormente/superiormente);

ii) individuate l'insieme dei suoi maggioranti e l'insieme dei suoi minoranti;

iii) determinate il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore e dite se sono massimo e minimo, rispettivamente. Soluzione

2.8) Siano dati due insiemi non vuoti E ed F, con $F \subset E \subset \mathbb{R}$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilite se è vera o falsa. Nel caso sia falsa, fornite un controesempio.

a) Se F è limitato inferiormente, allora lo è anche E.

b) Se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$.

c) Se E è limitato superiormente, allora $\sup F$ è un numero reale.

d) Si ha $E \times F \subseteq E \times E$.

Soluzione

2.9) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente. Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

i) $A = \{x_n = \dfrac{3n - 2}{n},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; $\quad$ ii) $A = \{x_n = n^2 - 2n - 3,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$;

iii) $A = \{x_n = (-1)^n \dfrac{3n - 1}{n},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; $\quad$ iv) $A = \{x \in \mathbb{R} : -6x^2 - |x| + 1 > 0\}$. Soluzione

2.10) Sia $A = \{x_n = \dfrac{3n - 1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

i) Provate che si ha $0 < x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

ii) Provate che si ha $\inf A = 0$ e $\sup A = 2$.

iii) Dite se sono minimo e massimo, rispettivamente. Soluzione

2.11) a) Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente (motivate le risposte!).

b) Determinate l'insieme A definito da $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{|x - 3|}{|x + 2|} \leq 1\}$.

Determinate $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$. Dite se A è un intervallo e se A è limitato. Soluzione
Soluzione

2.12) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup E = 1$. Per ciascuna delle seguenti proposizioni dite se la proposizione è necessariamente vera:

i) $\forall x \in E,\ x > 0.9$; ii) $\forall x \in E,\ x < 1$;

iii) $\exists x \in E : x > 0.9$; iv) $\exists x \in E : x < 1$. Soluzione

2.13) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Trovate tutte le coppie $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ di affermazioni, dove $\mathcal{P}$ è un'affermazione della prima colonna e $\mathcal{Q}$ è un'affermazione della seconda, tali che $\mathcal{P}$ implichi $\mathcal{Q}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : y \geq x$	a) A è limitato inferiormente.
ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y \geq x$	b) Si ha $\sup A = +\infty$.
iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in A, y \geq x$	c) A ammette minimo.
iv) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A, y \geq x$	d) A è limitato superiormente.
v) $\exists x \in A : \forall y \in A, y \geq x$	e) A è illimitato superiormente.
vi) $\forall x \in A, \exists y \in A : y \geq x + 1$	f) Si ha $\inf A = -\infty$.
vii) $\forall x \in A, \exists y \in A : y > x$	g) A non ammette massimo. Soluzione

2.14) Dimostrate che per ogni $x, y, a \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti disuguaglianze:

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$; ii) $|x - y| \leq |x - a| + |y - a|$; iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
Soluzione

2.15) Dimostrate che per ogni $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ valgono le seguenti disuguaglianze:

i) $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$; ii) $xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}y^2$; iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$.
Soluzione

2.16) Siano $a, b, C \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$a^2 \leq C(a + b)\,.$$

Allora

i) $a^2 \leq 2Cb + C^2$;

ii) $a \leq b + C$. Soluzione