Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 3: "Numeri complessi a gogò"
(26 settembre - 30 settembre 2022)

3.1) a) Determinate modulo, coniugato, reciproco dei seguenti numeri complessi:

$1-2i\,;\quad -3+i\,;\quad \sqrt{3}+i\,;\quad -2-\dfrac{1}{2}i\,;\quad 8i\,;\quad \dfrac{1}{1-i}-\dfrac{2i}{-i+1}\,.$

b) Scrivete in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\,;\qquad \dfrac{(8-i)+(6+i)}{2+2i}\,;\qquad \dfrac{3i}{|2-i|^2}\,;\qquad \dfrac{4+2i}{i}\,.$

c) Scrivete in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$-i\,;\quad 2-2i\,;\quad 3+\sqrt{3}i\,;\quad -\sqrt{3}+3i\,;\quad 2i\,;\quad -4\,.$

3.2) a) Sia $z=2i$. Determinate $\mathrm{Re}\big((z+1)(\overline{z}+3)\big)$ e $\mathrm{Im}\big(|z|\,i+\overline{(z+1)}\big)$.

b) Risolvete in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

i) $2z-3\overline{z}=3i+1\,;$ ii) $z^2=2\overline{z}\,;$ iii) $z^2=2\overline{z}i\,.$

c) Risolvete in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni di secondo grado:

i) $4z^2-4z+2-\sqrt{3}i=0\,;$ ii) $z^2+2iz-1-i=0\,.$

3.3) Rappresentate nel piano di Gauss i seguenti insiemi:

i) $A=\{z\in\mathbb{C}: |z|<2\,,\ \mathrm{Im}\,z\geq 1\}\,;$ ii) $B=\{z\in\mathbb{C}: 2\,\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z+1\geq 0,\ (\mathrm{Im}\,z)^2\leq 1\}\,;$

iii) $C=\{z\in\mathbb{C}: |z+1|=\mathrm{Im}\,z\}\,;$ iv) $D=\{z\in\mathbb{C}: |z+1|^2=(\mathrm{Im}\,z)^2\}\,;$

v) $E=\{z\in\mathbb{C}: |\mathrm{Im}\,z|\leq 2, |z|=|z-1|\}\,;$ vi) $F=\left\{z\in\mathbb{C}: \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>1\right\}.$

3.4) a) Scrivete in forma algebrica la quarta e la decima potenza di $z=-2\sqrt{3}+2i$.

b) Determinate e rappresentate nel piano di Gauss

i) le radici cubiche di $w=2(i-1)\,;$ ii) le radici quarte di z, quando $\overline{z}=1+i$.

3.5) Trovate le soluzioni complesse (z,w) dei seguenti sistemi di equazioni

i) $\begin{cases} w^2+i\overline{w}+z-\overline{z}=2\,\mathrm{Im}(-1+i) \\ |z|^2-z^2=0\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} z+iw\overline{z}=-i \\ w-iz\overline{w}=i\,; \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \overline{z}w=i \\ |w|^2z+1=0\,. \end{cases}$

3.6) Rappresentate nel piano di Gauss i numeri complessi della forma z^k

i) con $z=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $k\in\{0,1,2,3,4,5\}\,;$

ii) con $z=\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $k\in\{0,1,2,3,4,5\}\,.$

3.7) Dimostrate che comunque presi $z,w\in\mathbb{C}$ si ha

i) $|z+w|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2\,;$

ii) $|z+w|^2+|z-w|^2=2\big(|z|^2+|w|^2\big)\,.$

3.8) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2-2z+4=0$ e indicate con z_1 la soluzione dell'equazione che si trova nel primo quadrante del piano complesso. Scrivete in forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale

i) il numero complesso z_1;

ii) il simmetrico di z_1 rispetto all'asse reale;

iii) il simmetrico di z_1 rispetto all'asse immaginario;

iv) il simmetrico di z_1 rispetto all'origine;

v) il simmetrico di z_1 rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante;

vi) il simmetrico di z_1 rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

3.9) Trovate le soluzioni complesse di modulo 1 dell'equazione $|1 - z| = 1$ e interpretatele geometricamente nel piano di Gauss.

3.10) Sia $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Nel piano di Gauss rappresentate graficamente l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : z^3 \in E\}$.

3.11) Sia $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Determinate le immagini degli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$$

tramite le funzioni $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definite da $f(z) = z^2$, $g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} z$ e $h(z) = \frac{1}{z}$.