Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

**Esercizi paradigma 4: "Proprietà globali di funzioni reali di variabile reale... e i primi passi con i limiti"**

(3 - 7 ottobre 2022)

4.1) i) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di

a) maggiorante di $f$   b) estremo superiore di $f$   c) massimo di $f$.

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1 \,. \end{cases}$$

Usando la rappresentazione grafica di $f$,

a) determinate l'insieme dei maggioranti di $f$ e l'insieme dei minoranti di $f$.

b) determinate $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$. Essi sono massimo e minimo, rispettivamente?

Soluzione

4.2) Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia

i) strettamente crescente e non suriettiva;

ii) iniettiva e non monotona. Soluzione

4.3) i) Provate che la successione di termine $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ è strettamente crescente (ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ si ha $a_n < a_{n+1}$).

ii) Le successioni di termini $b_n = \log(a_n + 1)$ e $c_n = -\sqrt[3]{a_n}$ sono strettamente crescenti?

Soluzione

4.4) Dimostrate che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli

i) $]-\infty, -2[$;   ii) $]-2, 2[$;   iii) $]2, +\infty[$.

4.5) Siano $f, g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) = [x^2]$ e $g(x) = x^2 - f(x)$.

i) Rappresentate il grafico di $f$ e quello di $g$.

ii) Determinate il massimo intervallo $A \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $f|_A$ risulti crescente.

iii) Determinate il massimo intervallo $B \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $g|_B$ risulti crescente.

iv) Determinate l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f$ su $[-2, 2]$ e quelli di $g$ su $[-2, 2]$.

v) Individuate i punti di massimo e i punti di minimo sia di $f$ sia di $g$. Soluzione

4.6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?

i) Se $f$ e $g$ sono pari, allora il loro prodotto è una funzione pari.

ii) Se $f$ e $g$ sono periodiche, allora il loro prodotto è una funzione periodica.

iii) Se $f$ e $g$ sono monotone, allora il prodotto è una funzione monotona.

iv) Se $f$ e $g$ non sono limitate, allora il loro prodotto è una funzione non limitata. Soluzione

4.7) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?

i) Se $f$ e $g$ sono dispari, allora $f \circ g$ è una funzione dispari.

ii) Se $f$ e $g$ sono periodiche, allora $f \circ g$ è una funzione periodica.

iii) Se $f$ e $g$ sono monotone, allora $f \circ g$ è una funzione monotona.

iv) Se $f$ e $g$ non sono limitate, allora $f \circ g$ è una funzione non limitata. Soluzione

4.8) Scrivete, in matematichese (usando $\forall\varepsilon > 0, \dots$ oppure $\forall M > 0, \dots$), la definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2\,; \qquad \lim_{x\to3^-} f(x) = 1\,; \qquad \lim_{x\to0} f(x) = +\infty\,.$$

Soluzione

4.9) Provate, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+1} = 3\,.$

Soluzione

4.10) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usate il fatto che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$):

i) $\displaystyle\lim_{x\to3}(x^2-3x+1)\,; \qquad \lim_{x\to-1}\Big(\frac{1}{x^3}+2\sqrt[3]{x}\Big)\,; \qquad \lim_{x\to\pi}\Big(\frac{x^2+\sin\pi}{\sqrt[4]{x}}\Big)\,;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{x^2-4}\,; \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{2^{-1}}{x^3+1}\,; \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\sin 1}{|x|-1}\,; \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{\sin 1}{|x|-1}\,;$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{2}{x^2}+\frac{3x}{x^2+1}\Big)\,; \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-3}{1-x^4}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\Big)\,.$

Soluzione

4.11) Calcolate i seguenti limiti di funzioni razionali (Attenzione: se i limiti si presentano come forme indeterminate, dovete 'trasformarli opportunamente' per 'uscire' dalle forme indeterminate):

a) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+10}{x^2-x-3}\,;$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{12x^2-2}{\frac{1}{5x}}\,;$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+x+1}\,;$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+5}{(x-2)^2}\,;$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-1}{x^2-1}\,;$ f) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-x-2}\,;$ g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^4+2x^2}{x^7}\,;$ h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-\frac{1}{2x^3}}{2x^4+5}\,.$ Soluzione

4.12) Calcolate i seguenti limiti di funzioni irrazionali (usate il fatto che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Attenzione: se i limiti si presentano come forme indeterminate, dovete 'trasformarli opportunamente' per 'uscire' dalle forme indeterminate):

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,;$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})\,;$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}\sqrt{x^2+x+1}\,;$ d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+16}-4}{|x|}\,;$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}\,;$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}\,;$ g) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\,.$ Soluzione

4.13) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni a termini reali positivi. Provate con esempi che

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$ non implica $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0\,;$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ non implica $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0.$ Soluzione

4.14) Trovate due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali tali che

i) $a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$ e la successione $(a_nb_n)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite);

ii) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ e la successione $\displaystyle\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite). Soluzione