

Esercizi paradigma 5: “Limiti ‘senza limite’... e continuità”
(10 - 14 ottobre 2022)

5.1) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente, limitati. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

- i) $A = \{x_n = \cos(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$; ii) $B = \{x_n = \cos(\pi - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$;
iii) $C = \{x_n = \sin(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$; iv) $D = \{x_n = \arccos(\frac{1-n}{2+n}), n \in \mathbb{N}\}$.

5.2) Calcolate i seguenti limiti di successioni:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{4n})^{2n}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{n+4}{n-2})^n$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{n-4}{n-2})^n$; d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+n^2}$;
e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \log n^2}$; g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^4 + \cos n)}{\log(n^5 + \arctan n)}$;
h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(n+2^n) - n}{\log_2(3n+2^n) - n}$; i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log(n+2) - \log n}$; j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} - 3}$.

5.3) Calcolate i seguenti limiti (confronti di velocità di crescita...):

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x^2 + \sin x \cos x}{e^{x^2-2x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{2x}}{x^3 + \log x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\frac{\log(x^2 - x) + 3^x - x^5}{2^{x-1} + 2})$;
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5x)^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{x^5}{x+5})^{x^3+x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x + 3x}{\arctan 4x - e^{2x}}$.

5.4) Calcolate i seguenti limiti (usando i limiti notevoli...):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log(\frac{1}{x})$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{\log(\frac{x}{x-1})}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) + \log(1+x)}{x}$;
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^4}{\sin x^2}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x+1}{x+2})^{3x+4}$; g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x^2})^{x^3}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^{x^2} - 5^{2x})$;
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{x \sin^2 4x}$; j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x-5}{25-x^2})^x$; k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\tan x}$.

5.5) Studiate, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti:

- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\frac{x^2 + 2x - \alpha}{x-1} - \alpha(x-1)]$; ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)}{3x^5}$;
iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \sin \frac{1}{2^n}$; iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\log n}$; v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(2^n + 1)}{n^\alpha}$.

5.6) i) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n^\alpha) \log(n + e^n)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \arcsin \frac{1}{n^2 + 1}$.
ii) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^3 \log(1 + \frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha})$.

5.7) Provate che

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}) = 1$;
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}) = 2$.

5.8) Calcolate il limite delle successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$, i cui termini sono

$$\text{a) } a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \quad \text{b) } b_n = \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

5.9) Provate che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ non esiste.

5.10) Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali positivi. Quali delle seguenti condizioni sono sufficienti per concludere che il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste?

$$\text{a) } a_{n+2} < a_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}; \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n \text{ esiste.}$$

5.11) Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali e $l \in \mathbb{R}$. Provate che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |l|$. Vale anche l'implicazione inversa?

5.12) (Criterio del rapporto per successioni) Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali positivi.

$$\text{i) Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1, \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\text{ii) Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1, \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

$$\text{Calcolate i seguenti limiti: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!2^n}{n^n} \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!3^n}{n^n}.$$

5.13) Sia $(a_n)_n$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \end{cases} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

i) Provate, usando il principio di induzione, che $a_n > \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ii) Provate che $(a_n)_n$ è strettamente decrescente.

iii) Provate che $(a_n)_n$ ammette limite (usate il teorema di esistenza del limite per funzioni monotone) e determinatelo.

5.14) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$, tali che le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + xe^{\alpha x} & \text{se } x \leq 1 \\ \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^\beta)}{\sin 2x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} \cos x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risultino continue in $x = 1$ e in $x = 0$, rispettivamente.