Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 6: "Quando le funzioni iniziano ad essere più regolari... le funzioni continue....."
(17 - 21 ottobre 2022)

6.1) Determinate per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue su $\mathbb{R}$:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \alpha & \text{se } x < -1 \\ -x2^{-x} & \text{se } x \geq -1\,; \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1) & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 4x \cos x} & \text{se } x > 0\,; \end{cases}$ iii) $f(x) = \begin{cases} \cos x - 2\beta & \text{se } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x + \beta & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\alpha} \arctan \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$ Soluzione

6.2) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$. Estendete la definizione di f (cioè definite f nel punto $x = -1$) in modo che la funzione estesa risulti continua in $\mathbb{R}$.
Soluzione

6.3) Quali delle seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione reale? Quali hanno un'unica soluzione reale?
$e^{-x} - \arctan x = -1\,;$ $1 - x^4 = 4x^2\,;$ $2x^4 + |x| = 1\,;$ $x^{33} + x + 1 = 0\,.$
Soluzione

6.4) Provate che l'equazione $\sqrt{x} = 3 - x^2$ ammette una ed una sola soluzione x_0 nell'intervallo $[1, 2]$. Determinate un intervallo $\left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \subset \,]1, 2[$ con $x_0 \in \left]\widetilde{a}, \widetilde{b}\right[$ e $\widetilde{b} - \widetilde{a} \leq \dfrac{1}{4}$.
Soluzione

6.5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

(*) $$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 \qquad \forall x \in [-2, 2]\,.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente (*)?

i) $\exists x_0 \in [-2, 2] : \; f(x_0) = 3\,;$ ii) $\exists x_0 \in [-2, 2] : \; f(x_0) = \dfrac{3}{2}\,;$

iii) $\exists x_0 \in [-2, 2] : \; f(x_0) = 1\,;$ iv) $\exists x_0 \in [-2, 2] : \; f(x_0) = \dfrac{1}{2}\,.$

Soluzione

6.6) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito il seguente limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$. Soluzione

6.7) Per ciascuna delle seguenti funzioni dite se soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull' intervallo indicato:

i) $f(x) = \log x$ su $]0, +\infty[\,;$

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0\,; \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$ Soluzione

6.8) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia X un sottoinsieme limitato e non vuoto di $\mathbb{R}$. Provate che allora l'insieme immagine di X tramite f, ossia $f(X)$, è anch'esso un insieme limitato.

Soluzione

6.9) Sia $g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in X$ tale che $g(x_0) = x_0$ si dice *punto fisso di* g in X.

a) Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una funzione continua.

i) Provate che esiste un punto fisso di f in $[0, 1]$.

ii) Fate un disegno e interpretate graficamente l'enunciato.

b) Sia $f :]0, 1[\to]0, 1[$ una funzione continua. Esiste necessariamente un punto fisso di f in $]0, 1[$?

Soluzione

6.10) Provate che non esistono funzioni continue e biiettive e da $[0, 1[$ in $[0, 1]$.

Soluzione

6.11) Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue. È possibile che la disuguaglianza $f(x) \neq g(x)$ sia verificata solo in un punto dell'intervallo $]a, b[$?

Soluzione

6.12) (Teorema di Weierstrass generalizzato) Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f = +\infty.$$

Allora f ammette minimo su $\mathbb{R}$, cioè esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}} f$.

Soluzione

6.13) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Dite quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):

i) $f \sim g$ per $x \to x_0 \implies f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$;

ii) $f \sim g$ per $x \to +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$;

iii) $f(x) = o(x)$ per $x \to +\infty \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$;

iv) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;

v) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies xf(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;

vi) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0 \implies f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$;

vii) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0 \implies f(x) + g(x) = o(x)$ per $x \to 0$;

viii) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \implies f(x^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

Soluzione

6.14) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, motivando la risposta:

i) $\arcsin x^2 \sim x^2$ per $x \to 0$; ii) $\arcsin x = o(x^2)$ per $x \to 0^+$;

iii) $\arctan \sqrt{|x|} = o(1)$ per $x \to 0$; iv) $\arctan x = O(1)$ per $x \to -\infty$;

v) $\dfrac{1}{x^2} + 2 = O(1)$ per $x \to +\infty$; vi) $\sqrt{x^2 - x} \sim x$ per $x \to +\infty$;

vii) $1 - \cos(x - 1) \sim \frac{(x-1)^2}{2}$ per $x \to 1$.

Soluzione

6.15) i) Provate che la funzione $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e che la sua immagine è $\mathbb{R}$. Determinate la sua funzione inversa, $\mathrm{settsinh} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ii) Provate che la funzione $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e che la sua immagine è $[1, +\infty[$. Determinate la sua funzione inversa, $\mathrm{settcosh} x : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$.

iii) Valgono per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ le seguenti relazioni:

a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$,

b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x$.

Soluzione