Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2022–2023

Esercizi paradigma 7: "e ancora un po' di regolarità in più... le funzioni derivabili....."
(24 - 28 ottobre 2022)

7.1) a) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

i) $\cos x^2 - 1$; ii) $\sin \sqrt[3]{x}$; iii) $e^{2x} - 1$; iv) $2x^2 - 3x^3$.

b) Rappresentate il grafico delle funzioni nel punto a) in un intorno di 0.

7.2) Calcolate, dove esiste, la derivata prima delle seguenti funzioni:

$$\frac{x+2}{\arctan(x^2+1)}; \qquad \sin\sqrt[3]{x^3+x^{-1}}; \qquad xe^{\sqrt{x}+x}; \qquad (1+\cos x)^x.$$

$$\arctan x + \arctan\tfrac{1}{x}; \qquad x^{\frac{1}{x}}; \qquad \log(2x\sqrt{1-x^2}) + 2\arccos\sqrt{1-x^2}.$$

7.3) Dite se le seguenti affermazioni sono vere, citando teoremi visti a lezione oppure fornendo controesempi.

a) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è derivabile.

b) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è continua.

c) Se la funzione f^2 è continua, allora la funzione f è continua.

d) Se la funzione $|f|$ è continua, allora la funzione f è continua.

7.4) Dite (prima di fare i conti!) quali delle seguenti funzioni non sono derivabili in $x = 0$:

$|x| \arctan x$; $x\,|\cos x|$; $|x|\cos x$; $\arctan\sqrt[3]{x}$; $x \arctan\sqrt[3]{x}$.

7.5) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ e $g(x) = \cos(f(x^2-1))$. Determinate $g'(1)$.

7.6) Verificate che la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + \log x$ è biettiva. Determinate $f^{-1}(e^2+1)$ e $(f^{-1})'(e^2+1)$.

7.7) Verificate che $f(x) = \arctan(x^2 - 3x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0,3]$. Determinate i punti $c \in]0,3[$ tali che $f'(c) = 0$.

7.8) Verificate che $f(x) = x\,|x|$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[a,b] = [-1,1]$. Determinate i punti $c \in \;]-1,1[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

7.9) Dite quali delle seguenti funzioni sono monotone su tutto $\mathbb{R}$:

a) $x + \sin x$; b) $x - \sin x^2$; c) $\sin(\arctan x)$; d) $(1+x^2)e^{-x}$.

7.10) Dimostrate le seguente disuguaglianze

i) $\forall x > 0 \quad \dfrac{x-1}{x} \le \log x \le x - 1$; ii) $\forall x < 1 \quad e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

7.11) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Provate che f pari (dispari) implica f' dispari (pari).

7.12) (MOLTO UTILE NEGLI ESERCIZI PER IL CALCOLO DI $f'(x_0)$ - Corollario di Lagrange)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Sia $f : [x_0, x_0+\delta[\to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[x_0, x_0+\delta[$, derivabile su $]x_0, x_0+\delta[$ e tale che esiste $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$. Provate che allora esiste la derivata di $f'_+(x_0)$ e si ha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Nota: Analogamente per la derivata sinistra e per la derivata (scrivete voi l'enunciato in questi casi)!!!

7.13) Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

a) Dite se siete nelle ipotesi dell'esercizio precedente per ottenere che f è derivabile in $x_0 = 0$.

b) Provate, usando la definizione, che f è derivabile in $x_0 = 0$ e determinate $f'(0)$.

7.14) i) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \\ \log(1 + 3x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

risulta derivabile in $x_0 = 0$?

ii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \alpha \sin x + \beta \cos x & \text{se } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

risulti continua su tutto $]-1, +\infty[$. Verificate se per tali valori di α e β la funzione è anche derivabile.

iii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \beta e^x & \text{se } x < 0 \\ \arcsin(\alpha x^2 + x) - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x_0 = 0$.

7.15) Date un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e continua in un solo punto.

7.16) Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile in un punto $x_0 \in]a, b[$ per il quale $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) \neq 0$. Per quali valori di $\alpha > 0$ è derivabile in x_0 la funzione $|f(x)|^\alpha$? Che cosa succede se $f'(x_0) = 0$?

7.17) a) Trovate una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Trovate una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per la quale esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ma non esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

7.18) (Teorema di Rolle generalizzato) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Provate che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f'(c) = 0$.

7.19) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dimostrate che se $f'(a) < \lambda < f'(b)$ allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = \lambda$ (Suggerimento: ridursi al caso $\lambda = 0$ mediante la funzione $g(x) = f(x) - \lambda x$).

7.20) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0.$$

Provate che se $f(x_1) = f(x_2) = 0$ con $x_1 < x_2$ allora esiste $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che $g(\xi) = 0$ (cioè tra due zeri di f cade almeno uno zero di g (Suggerimento: considerate la funzione $\dfrac{f}{g}$).