

(A)

1) $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, limitato superiormente.

(a) $\exists \bar{a} \in A : \forall a \in A, a \leq \bar{a}$ (Falsa)

L'enunciato richiede che $\bar{a} \in A$, quindi $\bar{a} = \max A$. Basta prendere quindi un insieme A che non abbia massimo. Per es. $A = [0, 2[$. $\square$

(b) Se $L = \sup A$, allora $\forall a \in A, a < L$ (Falsa)

L'enunciato non esclude che $L = \sup A = \max A$, quindi in particolare $L \in A$; ma allora l'affermazione " $\forall a \in A, a < L$ " non è verificata. Per es. $A = [0, 2]$. $\square$

(c) Se $L = \sup A$, allora $\forall L' \in \mathbb{R} : L' < L, \exists a \in A : L' < a$ (Vera)

Segue dalla def. di $\sup A = \min \{L' \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq L'\}$

Oss. che non $[\forall L' \in \mathbb{R} : L' < L, \exists a \in A : L' < a] \Leftrightarrow$

$[\exists L' \in \mathbb{R}, L' < L : \forall a \in A, L' \geq a] \Leftrightarrow L'$ è un maggiorante di A più piccolo di L , in contraddizione con la def. di $L = \sup A$. $\square$

(d) Se $L \in \mathbb{R}$ è t.c. $\forall a \in A$ si ha $a < L + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora

(la condizione in (d) dice solo che L è un maggiorante per A) $\checkmark$

$L = \sup A$ (Falsa)

Se $\forall a \in A$ si ha $a < L + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora possiamo concludere che $\forall a \in A$ vale $a \leq L$, ma questo non garantisce assolutamente che $L = \sup A$. Per es., se $A = [0, 2[$, abbiamo $\forall a \in A$ che $a < 3 + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, e quindi $\forall a \in A, a \leq 3$, ma $L = 3$ non è il $\sup A (= 2)$. $\blacksquare$

2) $z^2 + (1-i)z = i \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z - i = 0$ (eq. di secondo grado in $\mathbb{C}$)

Possiamo applicare la formula risolutiva: $z_{1/2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4i}}{2}$

$$z_{1/2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{1-2i-1+4i}}{2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2},$$

dove $\sqrt{i}$ indica le due radici quadrate complesse di i , ossia $\sqrt{i} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$. Ricordiamo che con la notazione $\pm \sqrt{i}$ nella formula sopra, basta considerare una delle due radici quadrate complesse, per es. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, poichè dell'altra si tiene automaticamente conto con il segno - davanti alla $\sqrt{i}$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{-(1-i) \pm \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)}{2} = \frac{-(1-i) \pm (1+i)}{2} \\ &= \frac{-1+i \pm (1+i)}{2}. \end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re} z_1 = 0$, allora $\underline{z_1} = \frac{2i}{2} = \underline{i}$, $\underline{z_2} = \frac{-2}{2} = \underline{-1}$. ■

$$\begin{aligned} 3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \quad a_n &= \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - 2^n}{e^{n \log \alpha}} = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - 2^n}{\alpha^n} \\ &= \frac{2^n \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n - 1 \right]}{\alpha^n} = \frac{2^n}{\alpha^n} \left[e^{n \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} - 1 \right] \\ &= \frac{2^n}{\alpha^n} \left[e^{\frac{\log \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Ricordando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1, \end{cases}$

e osservando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{\frac{\log \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{2}} - 1 \right] = \sqrt{e} - 1$,

si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \sqrt{e} - 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$

Allora L è finito e diverso da zero e uguale a $\underline{\sqrt{e} - 1}$ se $\underline{\alpha = 2}$. ■

$$4) \quad L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 3n}} \right)$$

Ora basta oss. che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4 + 3n}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 3n}} \leq \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4 + 1}}$

[dal basso stimiamo la somma sostituendo ogni addendo della somma con il più piccolo degli addendi, cioè $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 3n}}$ (e ne abbiamo $3n$ di questi termini)];

dall'alto stimiamo la somma sostituendo ogni addendo della somma con il termine più grande degli addendi, cioè $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+1}}$ (e ne abbiamo $3n$ di questi termini).

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4+3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4(1+\frac{3}{n^3})}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\cancel{n}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^3}}} = 3$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\cancel{n}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}} = 3,$$

dal teorema del confronto (dei due carabinieri) segue che $\underline{L_1 = 3}$. $\square$

$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-3)^{2n} + (n+2)!}{(4n)^n - n^{2n}}$. Ricordando la gerarchia degli infiniti per le successioni scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{(n-3)^{2n} + (n+2)!}{(4n)^n - n^{2n}} &= \frac{n^{2n} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} + (n+2)!}{4^n n^n - n^{2n}} \\ &= \frac{\cancel{n^{2n}} \left[\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} + \frac{(n+2)!}{n^{2n}} \right]}{\cancel{n^{2n}} \left[\left(\frac{4}{n}\right)^n - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n^n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)n!}{n^{2n}} = 0$;

inoltre (vedi anche Es. 3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \log\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2 \cdot \frac{\log\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{-\frac{3}{n}} \cdot (-3)} = e^{-6}.$$

Quindi, in definitiva $\underline{L_2 = -e^{-6}}$. $\blacksquare$

5) $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(x + \sin \frac{1}{2x}\right) - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} \quad \left[\frac{\infty - \infty}{0} \right]$

Oss. che

$$\begin{aligned} \frac{\log\left(x + \sin \frac{1}{2x}\right) - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} &= \frac{\log\left[x \left(1 + \frac{\sin \frac{1}{2x}}{x}\right)\right] - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} = \\ &= \frac{\cancel{\log x} + \log\left(1 + \frac{\sin \frac{1}{2x}}{x}\right) - \cancel{\log x}}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} = \\ &= \frac{\log\left(1 + \frac{\sin \frac{1}{2x}}{x}\right)}{\frac{\sin \frac{1}{2x}}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2x}}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2} \left[\arctan x^2 + \frac{\log x}{x} \right]}. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left[\arctan x^2 + \frac{\log x}{x} \right]} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$\swarrow$ $x \rightarrow +\infty$ $\searrow$ $x \rightarrow +\infty$
 $\frac{1}{2x}$ $\frac{\pi}{2}$

e quindi, in definitiva, $l = \frac{1}{\pi}$. ■

6) $A = \left\{ (-1)^n \frac{4}{\pi} \arctan \left(1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$.

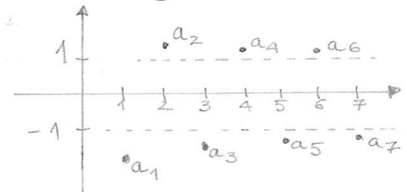
Oss. che $\frac{1}{n} \downarrow 0$, $\left(1 + \frac{1}{n} \right) \downarrow 1$, e $\arctan \left(1 + \frac{1}{n} \right) \downarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Dunque, posto $a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi} \arctan \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, $n \geq 1$ si ha che

$b_n \doteq a_{2n}$ è una successione a termini positivi decrescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1$,

mentre $c_n \doteq a_{2n+1}$ è una successione a termini negativi crescente $= -1$

e $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -1$.



(a) L'unico punto di accumulazione per A è 1. Falsa

A ha due pt. di accumulazione: 1 e -1. □

(b) L'insieme A è costituito solo da punti isolati. Vera □

(c) $\inf A = a_1 = -\frac{4}{\pi} \arctan 2$. Esso è minimo? Sì,
poiché $\inf A = a_1 \in A$. □

(d) $\sup A = a_2 = -\frac{4}{\pi} \arctan \frac{3}{2}$. Esso è massimo? Sì,
poiché $\sup A = a_2 \in A$. ■

7) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua con $f(0)=0$ e $f(1)=-1$.

$$g(x) = \alpha x^3 + \beta.$$

Consideriamo la funzione $f(x) - g(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Oss.

che $f(0) - g(0) = -\beta$ $f(1) - g(1) = -1 - \alpha - \beta$.

i) • Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ $f(0) - g(0) = -\frac{1}{2}$ $f(1) - g(1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$

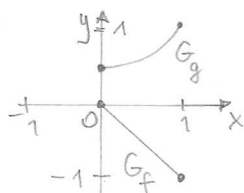
ii) • Se $\alpha = -1$, $\beta = -1$ $f(0) - g(0) = 1$ $f(1) - g(1) = -1 + 1 + 1 = 1$

iii) • Se $\alpha > -\frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$ $f(0) - g(0) = \frac{1}{4}$ $f(1) - g(1) = -1 - \alpha + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \alpha < 0$
 $\uparrow$ se $\alpha > -\frac{3}{4}$

Quindi, per il teorema di Jensen degli zeri $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c.
 $f(x_0) - g(x_0) = 0$, ossia $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c. $f(x_0) = g(x_0)$, ossia
 $g(x) = \alpha x^3 + \frac{1}{4}$, $\alpha > -\frac{3}{4}$, interseca necessariamente il grafico di f
 nell'intervallo $]0,1[$.

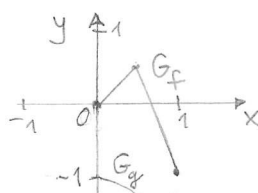
iv) • Se $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $f(0) - g(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) - g(1) = -1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 0$;
 quindi in $x_0 = 1$ si ha che $f(x)$ e $g(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}$ si intersecano,
 ma $1 \notin]0,1[$.

Graficamente:
 possibili
 grafici



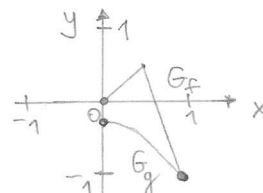
i) $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$

Nessuna intersezione in
 $]0,1[$



ii) $\alpha = -1$ $\beta = -1$

Nessuna intersezione in
 $]0,1[$



iii) $\alpha = -\frac{3}{4}$ $\beta = -\frac{1}{4}$

Nessuna intersezione in
 $]0,1[$. ■

8) $f(x) \sim 2x$ per $x \rightarrow +\infty$ significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = 1$;
 $g(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$ significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 1$.

(a) $f^2(x) + g(x) \sim 5x^2$ per $x \rightarrow +\infty$ (Vera)

Infatti

$$\frac{f^2(x) + g(x)}{5x^2} = \left(\frac{f^2(x)}{4x^2} \right) \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{g(x)}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1;$$

dunque $f^2(x) + g(x) \sim 5x^2$ per $x \rightarrow +\infty$. □

(b) $f(x) = o(x\sqrt{x})$ per $x \rightarrow +\infty$ (Vera)

Infatti

$$\frac{f(x)}{x\sqrt{x}} = \left(\frac{f(x)}{2x} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

□

(c) $g(x) - x^2 = o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$ (Falsa)

Basta prendere $g(x) = x^2 + x$; allora $g(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = 1$, ma $g(x) - x^2 = x \neq o(1)$
 per $x \rightarrow +\infty$. ■

9) $f(x) = \sin x^2 - \log(\cos x)$ per x in un intorno di 0.

(a)

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin x^2 - \log(1 + (\cos x - 1))}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{x^2}{x^\alpha} \left[\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ 1}} - \underbrace{\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ -\frac{1}{2}}} \right].$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{3}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}.$$

Dunque, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ esiste finito e diverso da 0 per $\alpha = 2$. $\square$

(b) Per definizione, la p.p. dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione x , per $x \rightarrow 0^+$, risulta $\frac{3}{2}x^2$ (nota: dal limite in (a))
 mi ha $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0^+$. $\blacksquare$

10)

$$f(x) = \begin{cases} (\beta+1)x^2 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(\alpha x) + \beta \log(x+e) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo innanzitutto det. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che f risulti continua

in $x_0 = 0$: f è continua in $x_0 = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{[(\beta+1)x^2 + e^x]}_{=e^0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{[\sin(\alpha x) + \beta \log(x+e)]}_{=\beta} = 1 = f(0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 1}}.$$

Allora

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(\alpha x) + \log(x+e) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{è continua in } x_0 = 0.$$

f risulta derivabile in $x_0 = 0$ se $\exists$ sono finiti i due limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{e sono uguali.}$$

Ora, per $h < 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{2h^2 + e^h - 1}{h}, \quad \text{e quindi } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1;$$

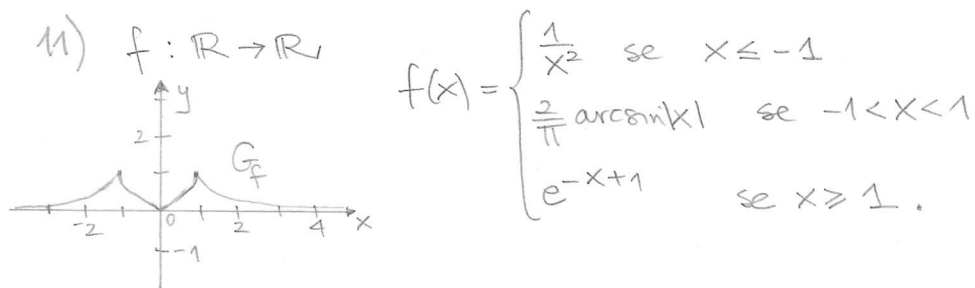
$$= \underbrace{2h}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0^- \\ \rightarrow 1}}$$

per $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\sin(\alpha h) + \log(h+e) - 1}{h} = \\ &= \frac{\sin(\alpha h)}{\alpha h} \cdot \alpha + \frac{\log\left(e\left(1+\frac{h}{e}\right)\right) - 1}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{\sin(\alpha h)}{\alpha h} \cdot \alpha}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0^+ \\ 1}} + \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{h}{e}\right)}{\frac{h}{e}} \cdot \frac{1}{e}}_{\substack{\downarrow \text{per } h \rightarrow 0^+ \\ 1}}. \end{aligned}$$

Dunque, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \alpha + \frac{1}{e}$. Allora f è derivabile in $x_0 = 0$ se $\alpha + \frac{1}{e} = 1$, ossia $\alpha = 1 - \frac{1}{e} (> 0)$. $\square$

Oss. La derivabilità di f in $x_0 = 0$ si poteva controllare anche usando il "criterio di Lagrange". $\blacksquare$



- (a) $x = -1$ è un pt. di continuità e di massimo locale per f Vera
 (b) $x = 0$ è un pt. di minimo locale per f , ma non di minimo assoluto

- Falsa
 (c) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$ Falsa $\square$
 f è continua in $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 1$, ma f non è deriv. in $] -1, 1[$, non essendo derivabile in $x = 0$. Il grafico di f ha in $(0, 0)$ un pt. angoloso. $\square$

$$\begin{aligned} g(x) &= f|_{[1, +\infty[} : [1, +\infty[\rightarrow]0, 1] & g(x) &= e^{-x+1}. \\ \text{Per } y \in]0, 1] \text{ mi ha } y &= e^{-x+1} & \Leftrightarrow \log y &= -x+1 \\ & & \Leftrightarrow x &= -\log y + 1. \end{aligned}$$

Allora $g^{-1}(x) = -\log x + 1$ per ogni $x \in I$, con $I =]0, 1]$. $\blacksquare$

12) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x+1+2\arctan(x+1)$

(a) f è continua su un intervallo e strett. monotona; quindi in particolare f è iniettiva. Poiché $\inf_{\mathbb{R}} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, si ha anche che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

Quindi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed essa è continua.

Inoltre, poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 + \frac{2}{1+(x+1)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

la funzione inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ dove } y_0 = f(x_0). \quad \square$$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}\left(\frac{1+x}{e^x+x^2}\right) = f^{-1}(0) = \underline{\underline{-1}}$ (poiché $f(-1) = 0$). $\square$

(c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\left[1 + \frac{2}{1+(x+1)^2}\right]_{x=-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$. $\blacksquare$

13) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (Vera).

$$\left. \begin{aligned} \text{Infatti } \frac{f(x)}{x} &= 1 + \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 = a \\ f(x) - x &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x \text{ è asintoto obliquo per } f, \text{ per } x \rightarrow +\infty \quad \square$$

(b) f ha un asintoto verticale in $x=0$ (Falsa)

Abbiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} \right] = 0$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. $\square$

(c) f non è derivabile in $x_0=0$ (Vera)

Infatti, $\forall h > 0$ $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1 + \frac{\sin h}{h\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} +\infty$; quindi

$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$. Ovvero. $f'_-(0) = 0$.

Risulta che il grafico di f ha un pr. angolare in $(0,0)$. $\square$

(d) f è derivabile in $x_0=0$ e $f'(0)=0$, perché f è costante in $x_0=0$. Falsa.

oss. la dicitura " f è costante in $x_0=0$ " non ha proprio "senso" !!!

e quindi non può motivare la derivabilità di f in $x_0=0$, e nemmeno $f'(0)=0$

14) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

(a) Se f è 1-periodica, allora $\forall x \in \mathbb{R} \exists c_x \in]x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}[$ t.c.

$f'(c_x)=0$, (Si).

Infatti, poiché f è 1-periodica, fissato $x \in \mathbb{R}$ qualunque, si ha

$$f(x-\frac{1}{2}) = f((x-\frac{1}{2})+1) = f(x+\frac{1}{2}).$$

Applicando il teorema di Rolle ad f nell'intervallo $[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]$ si ha che $\exists c_x \in]x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}[$

t.c. $f'(c_x)=0$. Per l'arbitrarietà di $x \in \mathbb{R}$ segue quanto si vuole. $\square$

(b) Se f è dispari e $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|=1$, allora $|f(x)| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$. (Si)

Poiché f è dispari su $\mathbb{R}$, segue $f(0)=0$.

(infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = -f(-x)$ e dunque $f(x) + f(-x) = 0$).

In particolare, per $x=0$ segue $2f(0)=0$; ossia $f(0)=0$).

Fissato $x \in \mathbb{R}_{>0}$ qualunque, dal teorema di Lagrange applicato ad f nell'intervallo $[0, x]$ segue che $\exists c_x \in]0, x[$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c_x),$$

ossia $f(x) = f'(c_x) \cdot x$, da cui $|f(x)| = |f'(c_x)| |x| \leq$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| |x| = |x|.$$

Analog, per $x \in \mathbb{R}_{<0}$ qualunque. Per $x=0$ da $f(0)=0$ si ha subito che $|f(x)| \leq |x|$.

In definitiva, $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $|f(x)| \leq |x|$. $\blacksquare$

15) Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$ il seq. sistema di eq.

$$\begin{cases} z\bar{w} = -i \\ |z|^2 w - 2\bar{z} = 3 \end{cases}$$

Oss. che $|z|^2 w - 2\bar{z} = 3$ si può riscrivere nella forma

$$(*) \quad z\bar{z}w - 2\bar{z} = 3;$$

passando al coniugato nella 1^a eq. del sistema abbiamo l'eq.

$$(**) \quad \bar{z}w = i, \quad (\text{un'eq. che dipende solo da } z)$$

e sostituendola in $(*)$ si ottiene l'eq. $\bar{z}i - 2\bar{z} - 3 = 0$.

Poniamo ora $z = x + iy$. Allora $\bar{z}i - 2\bar{z} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x + iy)i - 2(x - iy) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x i - y - 2x + 2y i - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y - 2x = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 4x = 6 \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

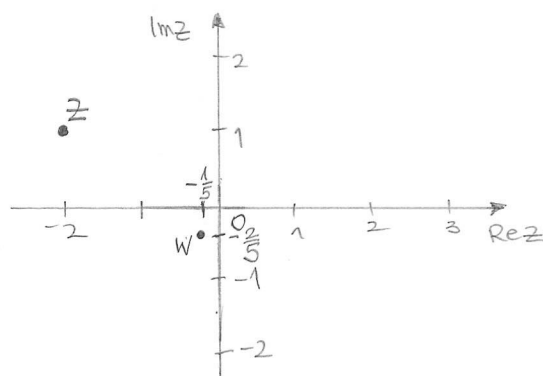
da cui segue immediatamente $x = -2$, $y = 1$. Quindi

$z = -2 + i$. Infine da $(**)$ segue $w = \frac{i}{-2-i}$, e dunque

$$w = \frac{i}{-2-i} \cdot \frac{-2+i}{-2+i} = \frac{-2i - 1}{5}. \text{ L'unica soluzione del sistema dato}$$

$$\text{risulta } \underline{(z, w) = (-2 + i, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i)}.$$

□



$$16) \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n} \end{cases} \quad n \geq 0$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $\underbrace{1 < a_n \leq 2}_{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

i) $1 < a_0 \leq 2$ $\mathcal{P}(0)$ è vero

ii) Preso un $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi e supposto vero $\mathcal{P}(n)$, proviamo che è

vero $\mathcal{P}(n+1)$: abbiamo $1 < a_n \leq 2$

(ipotesi induttiva)

$$\Rightarrow 2 < 1 + a_n \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{1+a_n} \Rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{1+a_n} \leq -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \textcircled{<} \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \textcircled{\leq 2}.$$

Dunque, dal principio di induzione segue che $1 < a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ □

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strett. decrescente, ossia $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo che $a_{n+1} < a_n \iff \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n} < a_n$

$$\Longleftrightarrow 3(1+a_n) - 2 < 2a_n(1+a_n)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3a_n - 2 < 2a_n^2 + 2a_n$$

$$\Leftrightarrow 2a_n^2 - a_n - 1 > 0$$

e questo è vero per (a) [oss. che $2x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$, o $x > 1$].

(c) Essendo $(a_n)_n$ una successione decrescente e limitata inferiormente (> 1),

per il teorema di Jensen del limite per funzioni monotone segue

che $(a_n)_n$ ammette limite finito $l \geq 1$. Passando al limite

nell'eq. $a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n}$ $n \geq 0$ segue $l = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+l}$,

ossia $2l^2 - l - 1 = 0$; poiché $l \geq 1$, concludiamo che

$$2l^2 - l - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l=1 \text{ opposite}$$

$$l=-\frac{1}{2}$$

$$l=1, \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$



(B) 1) $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, limitato inferiormente

(a) $\exists \bar{a} \in A : \forall a \in A, \bar{a} \leq a$ (Falsa)

L'enunciato richiede che $\bar{a} \in A$, quindi $\bar{a} = \min A$. Basta quindi prendere un insieme A che non abbia minimo. Per es. $A =]0, 2]$. $\square$

(b) Se $l = \inf A$, allora $\forall a \in A, l < a$ (Falsa).

L'enunciato non esclude che $l = \inf A = \min A$, quindi in particolare $l \in A$; ma allora l'affermazione " $\forall a \in A, l < a$ " non è verificata.

Per es. $A = [0, 2]$. $\square$

(c) Se $l = \inf A$, allora $\forall l' \in \mathbb{R} : l < l', \exists a \in A : a < l'$ (Vera)

Segue dalla def. di $\inf A = \max \{ l' \in \mathbb{R} : \forall a \in A, l' \leq a \}$.

Oss. che non $[\forall l' \in \mathbb{R} : l < l', \exists a \in A : a < l'] \Leftrightarrow$

$[\exists l' \in \mathbb{R}, l < l' : \forall a \in A, a > l'] \Leftrightarrow l'$ è un minovente di A più grande di l , in contraddizione con la def. di $l = \inf A$. $\square$

(d) Se $l \in \mathbb{R}$ è t.c. $\forall a \in A$ si ha $l - \frac{1}{n} < a \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora

$l = \inf A$ (Falsa)

Se $\forall a \in A$ si ha $l - \frac{1}{n} < a \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora possiamo concludere che $\forall a \in A$ vale $l \leq a$, ma questo non garantisce assolutamente che $l = \inf A$. Per es., se $A =]2, 3]$, abbiamo $\forall a \in A$ che $1 - \frac{1}{n} < a \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, e quindi $\forall a \in A, 1 \leq a$, ma $l = 1$ non è $\inf A = 2$. $\blacksquare$

2) $z^2 - (1-i)z = i \Leftrightarrow z^2 - (1-i)z - i = 0$ (eq. di secondo grado in $\mathbb{C}$). Possiamo applicare la formula risolutiva:

$$z_{1/2} = \frac{1-i \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4i}}{2} = \frac{1-i \pm \sqrt{1-2i-1+4i}}{2} = \frac{1-i \pm \sqrt{2i}}{2},$$

dove $\sqrt{i}$ indica le due radici quadrate complesse di i , ossia

$$\sqrt{i} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}. \text{ Ricordiamo che con la notazione}$$

$\pm\sqrt{i}$ nella formula sopra, basta considerare una delle due radici quadrate complesse, per es. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, poiché dell'altra si tiene automaticamente conto con il segno $-$ davanti alla $\sqrt{i}$. Abbiamo quindi

$$z_{1/2} = \frac{1-i \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2} = \frac{1-i \pm (1+i)}{2}.$$

Se $\operatorname{Im} z_1 = 0$, allora $z_1 = 1$, $z_2 = -i$. ■

$$\begin{aligned} 3) \quad \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \quad a_n &= \frac{(3-\frac{1}{n})^n - 3^n}{e^{n \log \alpha}} = \frac{(3-\frac{1}{n})^n - 3^n}{\alpha^n} \\ &= \frac{3^n \left[\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n - 1 \right]}{\alpha^n} = \frac{3^n}{\alpha^n} \left[e^{n \log(1-\frac{1}{3n})} - 1 \right] \\ &= \frac{3^n}{\alpha^n} \left[e^{\left(\log(1-\frac{1}{3n}) \right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3n}} \cdot \frac{1}{-3}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Ricordando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1, \end{cases}$

e osservando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{\left(\log(1-\frac{1}{3n}) \right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3n}} \cdot \frac{1}{-3}} - 1 \right] = e^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} - 1 < 0$$

si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{e}} - 1 & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$

Allora L è finito e diverso da zero e uguale a $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} - 1$ se $\alpha = 3$. ■

$$4) \quad L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4n}} \right)$$

Ora basta oss. che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4n}{\sqrt[3]{n^3+4n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4n}}}_{\text{somma}} \leq \frac{4n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

[dal basso stimiamo la somma sostituendo ogni addendo della somma con il più piccolo degli addendi, cioè $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4n}}$ (e ne abbiamo $4n$ di questi termini);

dall'alto stimiamo la somma sostituendo ogni addendo della somma con il termine più grande degli addendi, cioè $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ (e ne abbiamo $4n$ di questi termini).

Perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^3+4n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{4}{n^2})}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}} = 4$

e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}} = 4,$

dal teorema del confronto (dei due carabinieri) segue che $L_1 = 4$. $\square$

$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(4n)^n - n^{2n}}{(n+2)^{2n} + (n+1)!}$

Ricordando la gerarchia degli infiniti per le successioni scriviamo

$\frac{(4n)^n - n^{2n}}{(n+2)^{2n} + (n+1)!} = \frac{\cancel{n^{2n}} \left[\frac{(4n)^n}{n^{2n}} - 1 \right]}{\cancel{n^{2n}} \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} + \frac{(n+1)!}{n^{2n}} \right]} = \frac{\left[\left(\frac{4}{n}\right)^n - 1 \right]}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} + \frac{(n+1)!}{n^{2n}}}$

Ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n}\right)^n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n!}{n^n(n^n)} = 0;$

inoltre (vedi anche Es. 3)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \cdot 4} = e^4.$

Quindi, in definitiva, $L_2 = \frac{-1}{e^4} = \underline{\underline{-e^{-4}}}$. $\blacksquare$

5) $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x - \sin \frac{1}{6x}) - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} \quad \left[\frac{\infty - \infty}{0} \right]$

Oss. che

$$\begin{aligned} \frac{\log(x - \sin \frac{1}{6x}) - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} &= \frac{\log \left[x \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{6x}}{x} \right) \right] - \log x}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} = \\ &= \frac{\cancel{\log x} + \log \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{6x}}{x} \right) - \cancel{\log x}}{\frac{\arctan x^2}{x^2} + \frac{\log x}{x^3}} = \\ &= \frac{\log \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{6x}}{x} \right)}{-\frac{\sin \frac{1}{6x}}{x}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2} (\arctan x^2 + \frac{\log x}{x})} \end{aligned}$$

Ora

$$\left(\frac{\frac{1}{6x}}{\frac{1}{6x}} \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(\operatorname{arctg} x^2 + \frac{\log x}{x} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3\pi}$$

$\downarrow$
 $x \rightarrow +\infty$
 1

e quindi, in definitiva, $\underline{l} = -\frac{1}{3\pi}$. ■

6) $A = \left\{ (-1)^n \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$

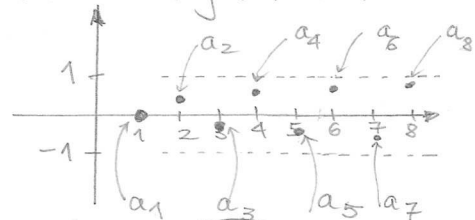
Oss. che $\frac{1}{n} \searrow 0$, $1 - \frac{1}{n} \nearrow 1$, e $\operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \nearrow \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Dunque, posto $a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$, $n \geq 1$ si ha che

$b_n \equiv a_{2n}$ è una succ. a termini positivi crescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1$,

mentre $c_n \equiv a_{2n+1}$ è una succ. a termini negativi decrescente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -1$$



(a) L'unico pt. di accumulazione per A è 1 Falsa

A ha due pt. accumulazione: 1 e -1. □

(b) L'insieme A è costituito solo da pt. isolati Vera

(i pt. di accum. di A non appartengono ad A). □

(c) $\inf A = -1$. Esso è minimo? No

$\nexists n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ t.c. $a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -1$. □

(d) $\sup A = 1$. Esso è massimo? No

$\nexists n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ t.c. $a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$. ■

7) $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua con $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$.
 $g(x) = \alpha x^3 + \beta$.

Consideriamo la funzione $f(x) - g(x): [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Oss.

che $f(-1) - g(-1) = -1 + \alpha - \beta$ $f(0) - g(0) = -\beta$.

i) • Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ $f(-1) - g(-1) = -1$ $f(0) - g(0) = -\frac{1}{2}$.

ii) • Se $\alpha = 1$, $\beta = -1$ $f(-1) - g(-1) = 1$ $f(0) - g(0) = 1$

iii) • Se $\alpha < \frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$ $f(-1) - g(-1) = -1 + \alpha + \frac{1}{4} < 0$ $f(0) - g(0) = \frac{1}{4}$.

Quindi, per il teorema di Jenza degli zeri $\exists x_0 \in]-1, 0[$ t.c.

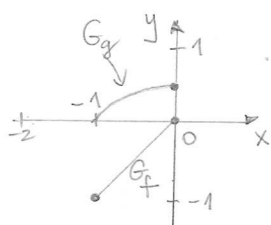
$f(x_0) - g(x_0) = 0$, ossia $\exists x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = g(x_0)$, ossia $g(x) = \alpha x^3 - \frac{1}{4}$

$\alpha < \frac{3}{4}$, interseca necessariamente il grafico di f nell'intervallo $] -1, 0[$.

iv) • Se $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$ $f(-1) - g(-1) = 0$, $f(0) - g(0) = \frac{1}{4}$;

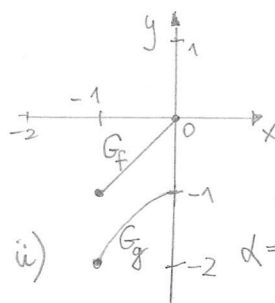
quindi in $x_0 = -1$ si ha che $f(x)$ e $g(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}$ si intersecano, ma $-1 \notin]-1, 0[$.

Graficamente:
possibili
grafici



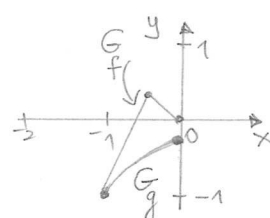
i) $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = -\frac{1}{2}$

Nessuna intersezione in $] -1, 0[$



ii) $\alpha = 1$ $\beta = -1$

come in i)



iv) $\alpha = \frac{3}{4}$ $\beta = -\frac{1}{4}$

come in i) ■

8) $f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$ significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$;

$g(x) \sim 3x$ per $x \rightarrow +\infty$ significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{3x} = 1$.

(a) $f(x) + g^2(x) \sim 10x^2$ per $x \rightarrow +\infty$ (Vera)

Infatti

$$\frac{f(x) + g^2(x)}{10x^2} = \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{g^2(x)}{9x^2} \right) \cdot \frac{9}{10} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1;$$

dunque $f(x) + g^2(x) \sim 10x^2$ per $x \rightarrow +\infty$. □

(b) $g(x) = o(x\sqrt{x})$ per $x \rightarrow +\infty$ (Vera)

Infatti

$$\frac{g(x)}{x\sqrt{x}} = \left(\frac{g(x)}{3x} \right) \cdot \left(\frac{3x}{x\sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

□

(c) $f(x) - x^2 = o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$ (Falsa)

Basta prendere $f(x) = x^2 + 1$; allora $f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$,

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, ma $f(x) - x^2 = 1 \neq o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$. ■

9) $f(x) = \arcsin x^2 + \log(\cos x)$ per x in un intorno di $x=0$.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^\alpha} &= \frac{\arcsin x^2 + \log(1 + (\cos x - 1))}{x^\alpha} = \\ &= \frac{x^2}{x^\alpha} \left[\underbrace{\frac{\arcsin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ 1}} + \underbrace{\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{(\cos x - 1)}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{(\cos x - 1)}{x^2}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0^+ \\ -\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Dunque, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ esiste finito e diverso da 0 per $\alpha = \underline{\underline{2}}$. $\square$

(b) Per definizione, la p.p. dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione x , per $x \rightarrow 0^+$, risulta $\frac{1}{2}x^2$ (nota: dal limite in (a) si ha $f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0^+$) $\blacksquare$

$$10) f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^3 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(\beta x) + \alpha \log(x+e) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Dobbiamo innanzitutto determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che f risulti continua in $x_0=0$: f è continua in $x_0=0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\iff \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} [(\alpha+1)x^3 + e^x]}_{e^0} = \underbrace{f(0)}_{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{[\sin(\beta x) + \alpha \log(x+e)]}_{=\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}.$$

Allora $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(\beta x) + \log(x+e) & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è continua in $x_0=0$.

f risulta derivabile in $x_0=0$ se sono finiti i due limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{e sono uguali.}$$

ora, per $h < 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{2h^3 + e^h - 1}{h} = 2h^2 + \frac{e^h - 1}{h} \quad \text{e quindi}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1;$$

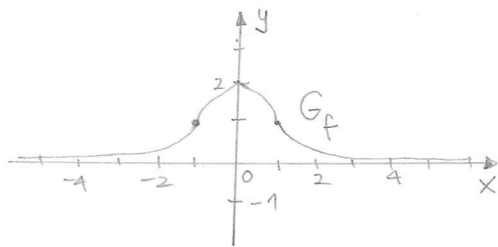
per $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sin(\beta h) + \log(h+e) - 1}{h} = \\ &= \frac{\sin(\beta h)}{\beta h} \cdot \beta + \frac{\log(e(1 + \frac{h}{e})) - 1}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{\sin(\beta h)}{\beta h}}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \\ 1}} \cdot \beta + \frac{\log(1 + \frac{h}{e})}{\frac{h}{e}} \cdot \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Dunque, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \beta + \frac{1}{e}$. Allora f è derivabile in $x_0 = 0$ se $\beta + \frac{1}{e} = 1$, ossia $\underline{\underline{\beta = 1 - \frac{1}{e}}}$ (> 0).

Oss. la derivabilità di f in $x_0 = 0$ si poteva controllare anche usando il "criterio di Lagrange".

11) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \leq -1 \\ 2 - \frac{2}{\pi} \arcsin |x| & \text{se } -1 < x < 1 \\ e^{-x+1} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) $x=0$ è un pt. di massimo loc. per f , ma non di massimo assoluto

Falsa.

(b) $x=1$ è un pt. di continuità, ma non è un pt. di estremo Vera

(c) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in $[-1, 1]$ Falsa.

f è continua in $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 1$, ma f non è derivabile in $] -1, 1 [$, non essendo derivabile in $x = 0$. Il grafico di f ha in $(0, 2)$ un pt. angoloso. $\square$

$$g(x) = f|_{[1, +\infty[} : [1, +\infty[\rightarrow]0, 1] \quad g(x) = e^{-x+1}.$$

Per $y \in]0, 1]$ mi ha $y = e^{-x+1} \Leftrightarrow \log y = -x+1 \Leftrightarrow x = 1 - \log y$

Allora $g^{-1}(x) = 1 - \log x$ per ogni $x \in I$, con $I =]0, 1]$. $\blacksquare$

12) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x - 1 + 3 \arctan(x-1)$.

(a) f è continua su un intervallo e strett. monotona; quindi in particolare f è iniettiva. Poiché $\inf_{\mathbb{R}} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si ha anche che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

Quindi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed essa è continua.

Inoltre, poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 + \frac{3}{1+(x-1)^2} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

la funzione inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ dove } y_0 = f(x_0). \quad \square$$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}\left(\frac{e^x - x}{1+x^2}\right) = f^{-1}(0) = \underline{\underline{1}}$ (poiché $f(1)=0$) $\square$

(c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ $\blacksquare$

13) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (Vera)

Infatti $\left. \begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 1 - \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 = a \\ f(x) - x &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x \text{ è asintoto obliquo per } f, \text{ per } x \rightarrow +\infty. \quad \square$

(b) f ha un asintoto verticale in $x=0$. (Falsa)

Aldorazio $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) \right] = 0.$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$ $\square$

(c) f non è derivabile in $x_0=0$ (Vera)

Infatti, $\forall h > 0$ $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 - \frac{\sin h}{h\sqrt{h}}$; quindi

$\underline{\underline{f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\infty}}$. Ovviamente $f'_-(0) = 0$.

Risulta che il grafico di f ha un pt. angoloso in $(0,0)$. $\square$

(d) f è derivabile in $x_0=0$ e $f'(0)=0$, perché f è costante in $x_0=0$ (Falsa)

Oss. la dicitura " f è costante in $x_0=0$ " non ha proprio "senso"!!

e quindi non può motivare la derivabilità di f in $x_0=0$, e nemmeno $f'(0)=0$.

14) Vedi Es. 14, Fila (A).

15) Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$ il seg. sistema di equazioni

$$\begin{cases} \bar{z}w = -i \\ |z|^2 \bar{w} - 2z = -3. \end{cases}$$

Oss. che $|z|^2 \bar{w} - 2z = -3$ può essere riscritta nella forma

$$(*) \quad z \bar{z} \bar{w} - 2z = -3;$$

passando al coniugato nella 1^a eq. del sistema dato abbiamo l'eq.

$$(**) \quad z \bar{w} = i, \quad \text{(un'eq. che dipende solo da } z \text{)}$$

e sostituendola in $(*)$ si ottiene l'eq. $\bar{z}i - 2z + 3 = 0$.

Poniamo ora $z = x + iy$. Allora $\bar{z}i - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - iy)i - 2(x + iy) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x i + y - 2x - 2y i + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = -3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4x = -6 \\ x - 2y = 0 \end{cases},$$

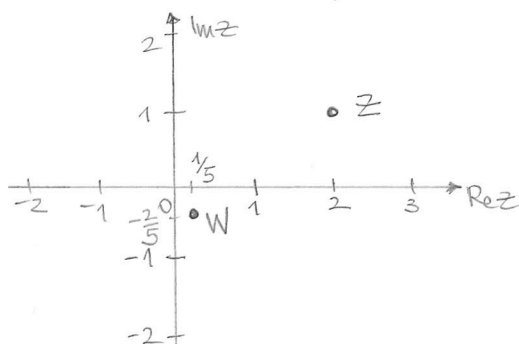
da cui segue immediatamente $x=2, y=1$. Quindi $z=2+i$.

$$\text{Infine da } (**) \text{ segue } \bar{w} = \frac{i}{2+i} = \frac{i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{1+2i}{5}$$

$$\text{e quindi } w = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

In definitiva, l'unica soluzione del sistema dato risulta

$$\underline{\underline{(z, w) = (2+i, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i)}}.$$



$$16) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n} \end{cases} \quad n \geq 0$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $\underbrace{\frac{1}{2} \leq a_n < 1}_{P(n)}$ then.

i) $\frac{1}{2} \leq a_0 < 1$ $\mathcal{P}(0) \bar{e}$ vero

ii) Preso un $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi e supposto vero $P(n)$, proviamo che

è vero $P(n+1)$: abbiamo $\frac{1}{2} \leq a_n < 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + a_n < 2$

(ipotesi induktiva)

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \geq \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq -\frac{1}{1+a_n} < -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{5}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n} \quad (\leq 1)$$

Dunque, dal principio di induzione segue

che $\frac{1}{2} \leq a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strett. crescente, ossia $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Notwendig $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n}$

$$\Leftrightarrow 2a_n(1+a_n) < 3(1+a_n) - 2$$

$$\Leftrightarrow 2a_n + 2a_n^2 < 3 + 3a_n - 2$$

$$\Leftrightarrow 2a_n^2 - a_n - 1 < 0$$

e questo è vero per (a) [oss. che $2x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$].

(c) Essendo $(a_n)_n$ una succ. crescente e limitata superiormente (< 1), per il teorema di Jenza del Limite per funzioni monotone segue che $(a_n)_n$ ammette limite finito $l \leq 1$. Passando

al limite nell'eq. $a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a_n}$ $n \geq 0$, segue

$$l = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+l}, \text{ ossia } 2l^2 - l - 1 = 0; \text{ poich\u00e9 } l \leq 1,$$

ma anche $l \geq \frac{1}{2}$, ($a_n \geq \frac{1}{2} \forall n \geq 0$), concludiamo $l = 1$,

0802 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

$$2l^2 - l - 1 = 0$$

$$\Rightarrow l = 1 \text{ oppure } l = -\frac{1}{2}$$