

(A)

$$1. \bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log(\log x)}{(\log^2 x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Abbiamo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x \log(\log x))'}{(\log^2 x)'} = \frac{(\log(\log x) + x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x})}{2(\log x) \cdot \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

quindi per il teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log(\log x)}{\log^2 x} = +\infty$,
 ossia $L_1 = +\infty$.

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{(\log x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\log x \log \sqrt{x}}}{e^{x \log(\log x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \log^2 x}}{e^{x \log(\log x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\log^2 x) \left[\frac{1}{2} - \frac{x \log(\log x)}{\log^2 x} \right]} = 0,$$

ossia $L_2 = 0$.

$$2. f: [-1, \frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{4}{3} x^2 \operatorname{arctg} 2x + 2x + 2x^2 + \log(1-2x).$$

Ricordando che

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

si ha

$$\operatorname{arctg} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5} + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1-2x) = -2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

da cui

$$f(x) = \frac{8x^3}{3} - \frac{32x^5}{5} + o(x^5) + 2x + 2x^2 - 2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4)$$

ossia

$$f(x) = -4x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

D'altra parte, $f \in \mathcal{C}^4([-1, \frac{1}{2}[)$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$) e quindi vale la formula di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi,

(a) dall'unicità del polinomio di Taylor segue

$$\underline{f(0)=0}, \underline{f'(0)=0}, \underline{f''(0)=0}, \underline{f'''(0)=0}, \text{ mentre } \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -4, \\ \text{ossia } \underline{f^{(4)}(0) = -16 \cdot 6 = -96.}$$

Quindi l'affermazione in (a) è falsa. □

(b) $x=0$ è un pt. di max locale (stretto) per f . Vera

Segue subito da (a) $[f(0)=0, f'(0)=0, f(x)=x^4(-4+o(1)) < 0$
in un intorno di 0]. □

Infine, abbiamo

$$\sum_{n=3}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = - \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right). \text{ Ora}$$

$$0 < -f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \text{ e } -f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{4}{n^{4\alpha}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4\alpha}}$ è convergente $\Leftrightarrow 4\alpha > 1$,
ovvia $\alpha > \frac{1}{4}$, per il criterio del confronto asintotico si ha che
 $\sum_{n=3}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ è convergente se (e solo se) $\alpha > \frac{1}{4}$. ■

$$3. L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^3 \int_1^{1/x} t^2 e^{1/t} dt. \quad [0, \infty]$$

Riscriviamo questo limite nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_1^{1/x} t^2 e^{1/t} dt}{x^{-3}} f(x)$$

avendo notato che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1$. Ora oss. che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x^2} e^x \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-3x^{-4}} \text{ e risulta } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}.$$

TFC
generalizzato

Possiamo allora concludere grazie al teorema di de l'Hôpital che

$$\underline{\underline{L = \frac{1}{3}}}. \quad \text{■}$$

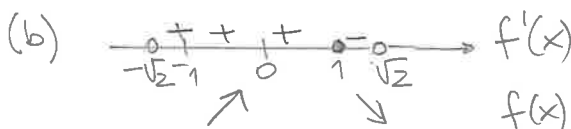
4. $f: [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{2-x^2} + x$.

Abbiamo che f è una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass essa assume massimo e minimo (assoluti) in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Essi possono essere assunti in un pt. critico interno all'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ oppure negli estremi dell'intervallo visto che f è derivabile in $] -\sqrt{2}, \sqrt{2} [$. Allora

(a) f ha un pt. critico in $x=1$:

Infatti $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} + 1$ in $] -\sqrt{2}, \sqrt{2} [$ e

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1. \quad \square$$



$x=1$ pt. di massimo assoluto per f e

$$f(1) = 2$$

Poiché $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ e $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, possiamo concludere che f ha un pt. di massimo assoluto in $x=1$ e un pt. di minimo assoluto in $x=-\sqrt{2}$. $\square$

(c) f è continua in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e derivabile in $] -\sqrt{2}, \sqrt{2} [$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange su $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ per f . Ora

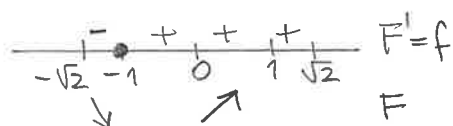
$$\frac{f(\sqrt{2}) - f(-\sqrt{2})}{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = 1. \quad \text{Si ha } f'(c) = 1 \text{ per } c \in] -\sqrt{2}, \sqrt{2} [$$

$$\Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{2-c^2}} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow -c = 0, \text{ ossia } \underline{c=0}. \quad \square$$

(d) Ricordiamo che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ per il TFC.

Quindi



Nota: $\sqrt{2-x^2} + x = 0$ per $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

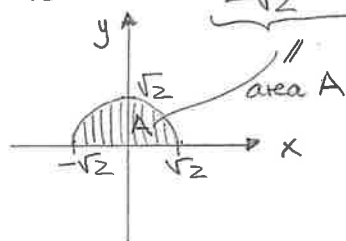
$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = -x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 = x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1$

Abbiamo $F(-\sqrt{2}) = \int_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} f(t) dt = 0$

$F(-1) < 0$

$F(\sqrt{2}) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(t) dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt + \frac{t^2}{2} \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = \pi$



5. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

$\textcircled{*} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \quad (< 1).$

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ $\textcircled{\text{Si}}$

Infatti, dal criterio del rapporto da $\textcircled{*}$ segue che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (cond. nec. per la convergenza di una serie) $\square$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{a_n} - 1)$ è convergente $\textcircled{\text{Si}}$.

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente per il criterio del rapporto da $\textcircled{*}$, e $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$, e quindi $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ per $n \rightarrow +\infty$ (poiché $a_n \rightarrow 0$), dal criterio del confronto asintotico segue che anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{a_n} - 1)$ è convergente. $\square$

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{a_n}$ è assolut. convergente $\textcircled{\text{Si}}$.

Da $\textcircled{*}$ e la continuità della funzione $\sqrt{\cdot}$ si ha

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$

Quindi dal criterio del rapporto segue che $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente. $\square$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente per il criterio di Leibniz (Si).

Infatti abbiamo $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ (vedi (a)). Rimane da verificare che la succ. $(a_n)_n$ è decrescente, almeno da un certo $\bar{n}$ in poi.

Notiamo che da (*) si ha che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

---> ho preso $\varepsilon = \frac{1}{3}$ nella def. di limite !!

quindi $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$

(ma un qualunque $\alpha \varepsilon \leq \frac{2}{3}$ va bene)

ossia $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$ (bastava $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$)

6. I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale

improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \cosh x^2}{e^{\alpha(x^2+x)}} dx.$

Abbiamo $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^{2\alpha} \cosh x^2}{e^{\alpha(x^2+x)}} > 0$ continua

Notiamo
$$f(x) = \frac{x^{2\alpha} (e^{x^2} + e^{-x^2})}{2 e^{\alpha(x^2+x)}} = \frac{x^{2\alpha} (e^{2x^2} + 1)}{2 e^{(\alpha+1)x^2 + \alpha x}}$$

$$\sim \frac{x^{2\alpha}}{2 e^{(\alpha-1)x^2 + \alpha x}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Ora basta osservare che se $\alpha - 1 \geq 0$ si ha

$$0 < \frac{x^{2\alpha}}{e^{(\alpha-1)x^2 + \alpha x}} < \frac{x^{2\alpha}}{x^\beta} \quad \forall \beta > 0, \forall x \geq \bar{x}_\beta$$

(infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{(\alpha-1)x^2 + \alpha x}} = 0 \quad \forall \alpha - 1 \geq 0$)

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta-2\alpha}} dx < +\infty$ se $\beta - 2\alpha > 1$, per il criterio

del confronto segue che $I_\alpha = [1, +\infty[$.

(a) L'insieme I_α è un insieme limitato Falsa.

(b) L'insieme I_α ammette minimo Vera.

(c) L'insieme I_α ammette un solo pt. di accumulazione Falsa.

(d) $\inf I_\alpha = 1$.

7. $A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} x \log^2(3x) dx.$

Abbiamo $\int x \log^2(3x) dx = \frac{x^2}{2} \log^2(3x) - \int \frac{x^2}{2} \log(3x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= \frac{x^2}{2} \log^2(3x) - \int x \log(3x) dx$$

= $\frac{x^2}{2} \log^2(3x) - \left[\frac{x^2}{2} \log(3x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right]$
integrando nuovamente per parti

$$= \frac{x^2}{2} \log^2(3x) - \frac{x^2}{2} \log(3x) + \frac{x^2}{4} + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dunque, dal teorema di Tomicevi - Barrow segue

$$A = \left[\frac{x^2}{2} \log^2(3x) - \frac{x^2}{2} \log(3x) + \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} =$$

$$= \frac{e^2}{9 \cdot 2} - \frac{e^2}{9 \cdot 2} + \frac{e^2}{9 \cdot 4} - \frac{1}{9 \cdot 4} = \frac{e^2}{36} - \frac{1}{36}.$$

Quindi $A = a e^b + c$, dove $a = \frac{1}{36}$, $b = 2$, $c = -\frac{1}{36}$

8. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^4} dt$

(a) La funzione F è pari su $\mathbb{R}$ Vera

Infatti, $F(0) = 0$, e $f(t) = \frac{\arctan t}{1+t^4}$ è dispari su $\mathbb{R}$. Dunque F è pari.

(infatti $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(-s) (-1) ds = \int_0^x f(s) ds = F(x) \quad \square$$

$\uparrow$
 $t = -s$ $\uparrow$
 f dispari

(b) $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (Vera).

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \xRightarrow{\text{TFC}} F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ segue dunque $F' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e quindi $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. $\square$

(c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ (Vera).

Infatti, $F(0) = 0$. Inoltre da $F'(x) = f(x)$ segue $F'(0) = \left. \frac{\arctg x}{1+x^2} \right|_{x=0} = 0$.

Inoltre $F''(x) = \frac{1+x^4}{1+x^2} - \frac{(\arctg x) 4x^3}{(1+x^4)^2} \forall x \in \mathbb{R}$, e

quindi $F''(0) = 1$.

Dalla formula di Taylor per F di ordine 2 e centrata in 0 (con il resto di Peano) segue

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad \square$$

(d) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ (Vera).

Basta oss. che

$0 \leq f(t) \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+t^4}$ per $t \geq 0$. In particolare risulta che $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, poiché $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt < +\infty$ e dunque $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ per il criterio del confronto. $\square$

9. Abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\log(n+2)! - \log n!] \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n} \log^\alpha(n+2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

La serie è a termini positivi e risulta

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{(n+2)!}{n!}\right) \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n} \log^\alpha(n+2)} = \frac{\log((n+2)(n+1)) \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n} \log^\alpha(n+2)}$$

$$\sim \frac{2(\log n) \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n} \log^\alpha(n+2)} = \frac{2 \log n}{n^{3/4} \log^\alpha(n+2)} \text{ per } n \rightarrow +\infty,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\log((n+2)(n+1)) \sim \log n^2 (= 2 \log n)$ per $n \rightarrow +\infty$.

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \rightarrow +\infty$. Notiamo infine che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \log n}{n^{3/4} \log^\alpha(n+2)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n) \log^{-\alpha}(n+2)}{n^{3/4}} \stackrel{i \geq 1 \text{ (almeno da un certo } n \text{ in poi)}}{=} +\infty \quad \forall \alpha \leq 1$$

Se $\alpha > 1$ $\frac{2 \log n}{n^{3/4} \log^\alpha(n+2)} \sim \frac{2}{n^{3/4} \log^{(\alpha-1)} n}$ per $n \rightarrow +\infty$

Ora basta osservare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\varepsilon}{\log^{(\alpha-1)} n} = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$,

quindi

$$\frac{2 n^\varepsilon}{n^{3/4+\varepsilon} \log^{(\alpha-1)} n} \geq \frac{2}{n^{3/4+\varepsilon}} \quad \forall n \geq \bar{n}_\varepsilon$$

Poiché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/4+\varepsilon}} = +\infty, \quad \text{risulta che} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/4} \log^{(\alpha-1)} n} = +\infty$$

$\uparrow$
 $\varepsilon \leq 1/4$

In definitiva, la serie data diverge positivi. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e quindi $\underline{I}_\alpha = \emptyset$. ■

10. Abbiamo $x^2 y' + 2xy - 1 = 0$ su $]0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{2}{x} y + \frac{1}{x^2} \quad \text{su }]0, +\infty[.$$

Abbiamo un'eq. diff. lineare del primo ordine con $a(x) = -\frac{2}{x}$ e $b(x) = \frac{1}{x^2}$ su $]0, +\infty[$. La formula risolutiva ci dà

$$y(x) = e^{-2 \log x} \left(c + \int \frac{1}{x^2} e^{2 \log x} dx \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

ovvia

$$y(x) = \frac{1}{x^2} (c + x) \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ora } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \left(\frac{c}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = 2$$

$$\Rightarrow c = 2.$$

Dunque $\hat{y}(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$ su $]0, +\infty[$ è la funzione ricercata.

si ha $\hat{y}(1) = 3$. ■

11. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa

(a) $f(0) \leq \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(-1)$ Vera

f è convessa su $\mathbb{R}$ se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$ si ha

(*) $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$

oppure $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$

(**) $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Allora considerando (*) con $x_1 = 1, x_2 = -1, \lambda = \frac{1}{2}$

si ha $f(0) = f(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)) \leq \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(-1).$

Possiamo anche considerare (**) con $x_1 = -1, x_2 = 1$ e $x = 0$

e si ha

$$f(0) \leq f(-1) + \frac{f(1) - f(-1)}{2} (0 + 1)$$

ossia

$$f(0) \leq \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(-1).$$

□

(b) $f(0) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Vera.

Si procede come in (a) con $x_1 = -x$ e $x_2 = x$ (o viceversa).

□

(c) Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Vera

Da (b) otteniamo $\forall x \in \mathbb{R}$

(*)' $-\frac{1}{2} f(-x) + f(0) \leq \frac{1}{2} f(x)$

Ora, se $x \rightarrow +\infty, -x \rightarrow -\infty$, quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-\frac{1}{2} f(-x)] = +\infty$;

quindi dal teorema del confronto (o dei due carabinieri) da (*)'

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} f(x) = +\infty, \text{ ossia } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

(d) Poiché f è convessa, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Poiché f è crescente su $\mathbb{R}$

$$f(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \leq f(\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)).$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } (f \circ f)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(f(x_1)) + (1-\lambda)f(f(x_2)) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ f \text{ convessa su } \mathbb{R}}}{=} \lambda (f \circ f)(x_1) + (1-\lambda)(f \circ f)(x_2); \end{aligned}$$

In definitiva $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha

$$(f \circ f)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda (f \circ f)(x_1) + (1-\lambda)(f \circ f)(x_2)$$

provando che $f \circ f$ è convessa in $\mathbb{R}$ (vedi Nota fondo pag. 12) ■

12a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y^2(e^x(x^2+1)) = 0 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'eq. diff. si può riscrivere nella forma

$$y' = y^2(e^x(x^2+1)),$$

da cui si ottiene subito che essa è

un'eq. diff. del 1° ordine a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \text{ con} \\ f(x, y) = g(y)h(x), \text{ dove} \\ g(y) = y^2 \quad h(x) = e^x(x^2+1). \end{cases}$$

Oss. che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'eq. e è anche soluzione del pbm. di Cauchy per $\alpha = 0$.

Poiché $h(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g(y) = y^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il pbm. di Cauchy dato ammette, a priori, una ed una sola soluzione in un intorno I di $x_0 = 0$.

Se $\alpha = 0$, l'unica sol. del pbm. di Cauchy è la sol. $y_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \neq 0$, allora $y(x) \equiv 0$ non è sol. del pbm. di Cauchy, e nessun'altra sol. può annullarsi in un pt. $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (altrimenti

il pbn. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(e^x(x^2+1)) \\ y(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

avrebbe localmente (in un intorno di $\bar{x}$) due soluzioni). Quindi

$$y' = y^2(e^x(x^2+1)) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = e^x(x^2+1)$$

e quindi

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int e^x(x^2+1) dx,$$

ora

$$-\frac{1}{y(x)} = \int (e^x x^2 + e^x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \int e^x x^2 dx &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integr. per parti}}}{x^2 e^x} - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + c \end{aligned}$$

e dunque

$$-\frac{1}{y(x)} = e^x (x^2 - 2x + 3) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Risulta dunque

$$y(x) = \frac{-1}{e^x(x^2 - 2x + 3) + c} \quad c \in \mathbb{R}$$

Oss. allora che

$$y(0) = \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{3 + c}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1+3\alpha}{\alpha}$$

Abbiamo dunque per $\alpha \neq 0$

$$y_\alpha(x) = \frac{-1}{e^x(x^2 - 2x + 3) - \frac{1+3\alpha}{\alpha}}$$

(oss. se scriviamo $y_\alpha(x) = \frac{-\alpha}{\alpha e^x(x^2 - 2x + 3) - (1+3\alpha)}$ possiamo inglobare in quest' espressione anche il caso $\alpha = 0$).

(b) Se $\alpha = -\frac{1}{4}$ si ha

$$y_\alpha(x) = \frac{-1}{e^x(x^2 - 2x + 3) + 1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y_{\alpha}(x) = \frac{-1}{e^x(x^2-2x+3)+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo già oss. che $\text{dom } y_{\alpha} = \mathbb{R}$. Inoltre si ha che $y_{\alpha}(x) < 0$

in $\mathbb{R}$. Abbiamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_{\alpha}(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ asintoto orizz. per y_{α} per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_{\alpha}(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizz. per y_{α} per $x \rightarrow +\infty$.

Infine y_{α} è derivabile e

$$\begin{aligned} y'_{\alpha}(x) &= \frac{e^x(x^2-2x+3)+e^x(2x-2)}{(e^x(x^2-2x+3)+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2+1)}{(e^x(x^2-2x+3)+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

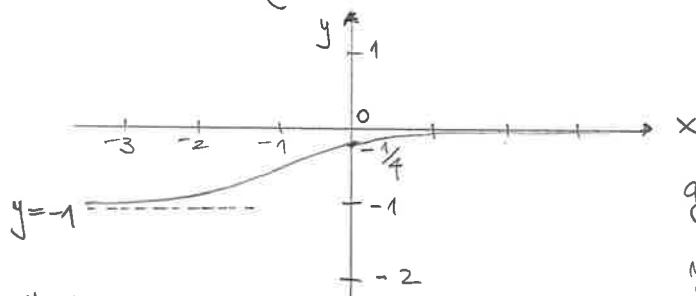


grafico qualitativo di $y_{\alpha}(x)$ per $\alpha = -1/4$.

Eq. rettag. al grafico di y_{α} in $x=0$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{16}x - \frac{1}{4}}}$$

Nota Es. 11 (d) Si può dim. la (d) anche usando **(**)** a pag. 9;

Essendo f convessa in $\mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Dalla crescenza di f in $\mathbb{R}$ si ha allora

$$\begin{aligned} f(f(x)) &\leq f\left(f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\right) \leq f\left(f(x_1) + \frac{f(f(x_2))-f(f(x_1))}{f(x_2)-f(x_1)}(f(x)-f(x_1))\right) \\ &\quad \text{def. di convessità applicata con } x = f(x_1) \text{ e } x_2 = f(x_2) \end{aligned}$$

$$= f(f(x_1)) + \frac{f(f(x_2))-f(f(x_1))}{f(x_2)-f(x_1)}(f(x)-f(x_1)),$$

ossia

$$(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(x_1) + \frac{(f \circ f)(x_2) - (f \circ f)(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$